# Corsi di Laurea in Ingegneria Civile, Rea, Gestionale (A-L)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 31 Gennaio 2012

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*

---

**I**

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{A} = \{(1,0,-1),(1,-1,0),(1,0,0)\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{aligned} f(1,0,-1) &= 2(1,0,-1) + (1,-1,0) + (-h-7)(1,0,0) \\ f(1,-1,0) &= -(1,0,-1) + 4(1,-1,0) - 3(1,0,0) \qquad \text{con } h \text{ parametro reale} \\ f(1,0,0) &= h(1,0,0) \end{aligned}$$

1 Determinare $M^{\mathcal{A}}(f)$ e $M(f) = M^{\mathcal{E}}(f)$.

2 Studiare $f$, determinando in particolare, al variare di $h$, nucleo e immagine.

3 Studiare la semplicità di $f$ al variare di $h$.

4 Calcolare al variare di $h$ l' immagine del vettore $(1,2,-1)_{\mathcal{A}}$.

5 Verificare che per ogni valore di $h$ risulta $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$.

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Sono date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s} : \begin{cases} y = 2 \\ x = 2z \end{cases}$$

Dopo aver verificato che queste due rette sono sghembe sia $R \in \mathbf{r}$ il punto generico; si determini la retta $\mathbf{t}$ passante per $R$ ortogonale ed incidente ad $\mathbf{s}$. Determinare $R$ in modo che $\mathbf{t}$ sia ortogonale ad $\mathbf{r}$.

2 Determinare e studiare, sul piano $z = 0$. il fascio $\phi$ di coniche che ha i punti base

$$(1,1),\ (2,2),\ (3,1),\ (4,2).$$

Specificare le equazioni delle coniche spezzate.

3 Determinare il cono che ha vertice $(2,0,-1)$ e per direttrice l'iperbole equilatera di $\phi$.

*Soluzione*

1) Troviamo la matrice associata a $f$ rispetto $\mathcal{A}$. Dai dati si scrive direttamente che:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -h-7 & -3 & h \end{pmatrix}$$

Per quanto concerne la matrice associata ad $f$ rispetto alla base canonica si deve fare qualche conto:

$$\begin{cases} f(1,0,-1) = 2(1,0,-1) + (1,-1,0) + (-h-7)(1,0,0) = (-h-4,-1,-2) \\ f(1,-1,0) = -(1,0,-1) + 4(1,-1,0) - 3(1,0,0) = (0,-4,0) \\ f(1,0,0) = h(1,0,0) = (h,0,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(e_1) - f(e_3) = (-h-4,-1,-2) \\ f(e_1) - f(e_2) = (0,-4,0) \\ f(e_1) = (h,0,0) \end{cases}$$

e quindi si ottiene la matrice

$$M^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} h & h & 2h+4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Per studiare $f$, dalla matrice $M^{\mathcal{A}}(f)$ otteniamo $|M^{\mathcal{A}}(f)| = 9h$, perciò, per $h \neq 0$ $f$ è un isomorfismo ($\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$).
Se $h = 0$, allora:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{A}}(f)) = 2$, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,-4,3)_{\mathcal{A}}, (2,1,-7)_{\mathcal{A}})$. Per quel che riguarda il nucleo, invece, abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,0,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}((1,0,0)).$$

3) Per studiare la semplicità di $f$, dobbiamo calcolare il suo polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -1 & 0 \\ 1 & 4-T & 0 \\ -h-7 & -3 & h-T \end{vmatrix} = (T-3)^2(T-h).$$

Gli autovalori sono $T = h$ e $T = 3$. Se $h \neq 3$, allora $h$ è autovalore con molteplicità algebrica 1 e 3 è autovalore con molteplicità algebrica 2, mentre per $h = 3$ l'unico autovalore è 3 con molteplicità algebrica 3.
Supponiamo $h \neq 3$. In tal caso $f$ non è semplice poiché con facili calcoli risulta che $V_3 = \ker f_3$ ha dimensione 1 (non 2).
Supponiamo che sia $h = 3$. Anche in questo caso $f$ non è semplice poiché $V_3 = \ker f_3$ ha ancora dimensione 1 (non 3).
4) Per calcolare l' immagine di $(1,2,-1)_{\mathcal{A}} = v_1 + 2v_2 - v_3 = (1,0,-1) + 2(1,-1,0) - (1,0,0) = (2,-2,-1)$ usiamo la matrice associata rispetto alle basi canoniche e calcoliamo $f(v) = M(f) \cdot v$

$$f(2,-2,-1) = \begin{pmatrix} h & h & 2h+4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h-4 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) La verifica è immediata se $h \neq 0$ dato che $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Se $h = 0$ le basi di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

**Soluzione II**

1) Le rette hanno punti impropri $R^\infty = (0,0,1,0)$ ed $S^\infty = (2,0,1,0)$ e quindi non sono parallele, non hanno punti propri di intersezione e di conseguenza sono sghembe.
Il punto generico $R \in$ ha coordinate $R \equiv (0,0,\alpha)$; consideriamo il punto generico $S = (2\gamma, 2, \gamma) \in \mathbf{s}$ e scriviamo la retta passante per $R$ e per $S$

$$\frac{x}{2\gamma} = \frac{y}{2} = \frac{z-\alpha}{\gamma-\alpha}$$

i cui parametri direttori sono quindi $(2\gamma, 2, \gamma - \alpha)$. Imponendo l'ortogonalità con la retta **s** si ottiene la condizione

$$4\gamma + \gamma - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 5\gamma$$

e sostituendo nell'equazione della retta si ottiene

$$\mathbf{t} : \frac{x}{\gamma} = y = \frac{z - 5\gamma}{-2\gamma}\,.$$

Imponendo che **t** sia ortogonale ad **r** si ottiene la condizione $\gamma = 0$, quindi la retta cercata è l'asse $\vec{y}$.
2) Siamo nel caso di quattro punti distinti quindi ci sono tre coniche spezzate distinte

$$(y-1)(y-2) = 0;\ (x-y)(x-y-1) = 0;\ (x-3y+2)(x+y-4) = 0.$$

Usiamo le prime due per scrivere l'equazione del fascio

$$\Phi :\ (y-1)(y-2) + h(x-y)(x-y-2) = 0 \quad \Phi :\ hx^2 - 2hxy + (h+1)y^2 - 2hx + (2h-3)y + 2 = 0\,.$$

Le coniche irriducibili si hanno per $|B| = -h^2 - \frac{h}{4}$ cioè per $h \neq 0, -\frac{1}{4}$. Dal $|A| = h$ avremo:
$|A| > 0 \quad h > 0$ ELLISSI. Non ci sono circonferenze;
$|A| < 0 \quad h < 0$ IPERBOLI. Per $h = -\frac{1}{2}$ si ha l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 8y - 4 = 0$.
$|A| = 0 \quad h = 0$ Non ci sono PARABOLE.
3) Scriviamo l'equazione della quadrica contente questa iperbole equilatera

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 8y - 4 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 2xy + axz + byz + cz^2 + dz - 2x + 8y - 4 = 0 \Rightarrow$$

la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & -1 \\ -1 & -1 & \frac{b}{2} & 4 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ -1 & 4 & \frac{d}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

Imponiamo che il vertice sia $(2, 0, -1, 1)$ e svolgiamo il seguente sistema per ottenere $a, b, c, d$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & -1 \\ -1 & -1 & \frac{b}{2} & 4 \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2} \\ -1 & 4 & \frac{d}{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si ha quindi

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ \frac{b}{2} = 2 \\ a - c + \frac{d}{2} = 0 \\ -2 - \frac{d}{2} - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -4 \\ d = -12 \end{cases}$$

L'equazione del cono è

$$z(2x + 4y - 4z - 12) + x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 8y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 - 2xy + 2xz + 4yz - 4z^2 - 2x + 8y - 12z - 4 = 0$$