CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCAR-Z)- Ingegneria Industriale (SALE-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni - Ingegneria Civile e Ambientale - Ingegneria Gestionale - Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 30 Novembre 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h & 3 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f, determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Calcolare $f^{-1}(1, 3h, -h, -1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Studiare la semplicità di f, determinando una base di autovettori indipendente dal parametro.

4) Dato $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$, calcolare $f(V)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare il valore di h per il quale $(h, 1, 0, -h) \in f(V)^\perp$, rispetto al prodoto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione

1) Dato che $|M(f)| = -3(h^2 + 2h - 3)$, vediamo che per $h \neq 1, -3$ f è un isomorfismo, cioè f è suriettiva, per cui $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$, e iniettiva, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
Sia $h = 1$. Allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1, 0, 0, 2), (0, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2t = 0,\ y + 3z = 0,\ -3t = 0\} = \mathscr{L}((0, -3, 1, 0)).$$

Sia $h = -3$. Allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1, 0, 0, 2), (0, -3, 1, 0), (2, 0, 0, 1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2t = 0,\ -3y + 3z = 0,\ -3t = 0\} = \mathscr{L}((0, 1, 1, 0)).$$

2) Per calcolare $f^{-1}(1,3h,-h,-1)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & h & 3 & 0 & | & 3h \\ 0 & 1 & h+2 & 0 & | & -h \\ 2 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & h & 3 & 0 & | & 3h \\ 0 & \frac{-h^2-2h+3}{3} & 0 & 0 & | & -h(h+3) \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq 1,-3$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 4$ (come già sapevamo dal fatto che per $h \neq 1,-3$ si ha $|M(f)| \neq 0$) e abbiamo una sola soluzione:

$$\begin{cases} x+2t = 1 \\ hy+3z = 3h \\ \frac{-h^2-2h+3}{3}y = -h(h+3) \\ -3t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{3h}{h-1} \\ z = -\frac{h}{h-1} \\ t = 1, \end{cases}$$

per cui per $h \neq 1,-3$ si ha $f^{-1}(1,3h,-h,-1) = \{(-1, \frac{3h}{h-1}, -\frac{h}{h-1}, 1)\}$.
Sia $h = -3$. In tal caso, nella matrice ottenuta con la riduzione abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & | & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & -3 \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ e il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x+2t = 1 \\ -3y+3z = -9 \\ -3t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = z+3 \\ t = 1. \end{cases}$$

Quindi, per $h = -3$:

$$f^{-1}(1,-9,3,-1) = \{(-1, z+3, z, 1) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Sia $h = 1$. In tal caso, nella matrice ottenuta con la riduzione abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & -3 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene subito che il sistema è impossibile, cioè per $h = 1$ $f^{-1}(1,3,-1,-1) = \emptyset$.

3) Il polinomio caratteristico è:

$$P(T) = (T^2-2T-3)[T^2-(2h+2)T+h^2+2h-3],$$

per cui gli autovalori sono $-1, 3, h+3, h-1$. Per $h \neq 0, 4, -4$ sono a due a due distinti, per cui in questo caso f è semplice. Quindi, cerchiamo una base di autovettori per $h \neq 0, 4, -4$.
Calcoliamo V_{-1}:

$$M(f)+I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h+1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & h+3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h+1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{-h^2-4h}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui, essendo $h \neq 0, -4$, si ottiene:

$$V_{-1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+2t = 0,\ (h+1)y+3z = 0,\ \tfrac{-h^2-4h}{3}y = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,-1)).$$

Calcoliamo V_3:

$$M(f)-3I=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h-3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h-3 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{-h^2+4h}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui, essendo $h \neq 0,4$, si ottiene:

$$V_3=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid -2x+2t=0,\ (h-3)y+3z=0,\ \tfrac{-h^2+4h}{3}y=0\}=\mathscr{L}((1,0,0,1)).$$

Calcoliamo V_{h+3}:

$$M(f)-(h+3)I=\begin{pmatrix} -h-2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -h-2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -h-2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-h^2-4h}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui, essendo $h \neq 0,-4$, si ottiene:

$$V_{h+3}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid (-h-2)x+2t=0,\ -3y+3z=0,\ \tfrac{-h^2-4h}{2}x=0\}=\mathscr{L}((0,1,1,0)).$$

Calcoliamo V_{h-1}:

$$M(f)-(h-1)I=\begin{pmatrix} -h+2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -h+2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -h+2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-h^2+4h}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui, essendo $h \neq 0,4$, si ottiene:

$$V_{h-1}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid (-h+2)x+2t=0,\ y+3z=0,\ \tfrac{-h^2+4h}{2}x=0\}=\mathscr{L}((0,-3,1,0)).$$

Dunque, per $h \neq 0,4,-4$ una base di autovettori è $[(1,0,0,-1),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,-3,1,0)]$. Dal momento che questa è una base di autovettori indipendente dal parametro, essa è una base di autovettori anche per $h=0,4,-4$, da cui si deduce che f è semplice per ogni h.

4) Dal momento che:

$$V=\mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)),$$

allora $f(V)=\mathscr{L}(f(1,0,0,1),f(0,1,0,-1),f(0,0,1,1))$. Sappiamo che $f(1,0,0,1)=(3,0,0,3)$, in quanto $(1,0,0,1)\in V_3$. Inoltre, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h & 3 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ h \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & h & 3 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ h+2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vediamo che $f(0,1,0,-1)=(-2,h,1,-1)$ e $f(0,0,1,1)=(2,3,h+2,1)$. Quindi:

$$f(V)=\mathscr{L}((3,0,0,3),(-2,h,1,-1),(2,3,h+2,1))=\mathscr{L}((1,0,0,1),(-2,h,1,-1),(2,3,h+2,1)).$$

Calcoliamo una base di $f(V)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & h & 1 & -1 \\ 2 & 3 & h+2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & h & 1 & 0 \\ 0 & h+3 & h+3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq -3$, $\dim f(V)=3$ e $[(3,0,0,3),(-2,h,1,-1),(2,3,h+2,1)]$ è una sua base. Per $h=-3$ si ha $\dim f(V)=2$ e una sua base è $[(1,0,0,1),(-1,h,1,0)]$.

Per trovare il valore di h per il quale $(h,1,0,-h) \in f(V)^{\perp}$ è sufficiente trovare il valore di h per il quale:

$$\begin{cases} (1,0,0,1)\cdot(h,1,0,-h) = 0 \\ (-2,h,1,-1)\cdot(h,1,0,-h) = 0 \\ (2,3,h+2,1)\cdot(h,1,0,-h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h-h=0 \\ -2h+h+h=0 \\ 2h+3-h=0. \end{cases}$$

Quindi, il valore cercato è $h=-3$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:

$$r\colon \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x=0, \end{cases}$$

mostrare che r e s sono parallele, determinare il piano che le contiene e calcolare la loro distanza $d(r,s)$.

2) Dati, nel piano $z=0$, i punti $A=(1,-1)$, $B=(1,1)$, $C=(2,-2)$ e $D=(2,2)$, determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti A, B, C e D. Determinare la conica passante per i punti A, B, C, D ed $E=(0,1)$.

3) Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$(h-1)x^2+y^2-z^2-2hxz+2x-2y-1=0.$$

Soluzione

1) Si vede facilmente che r e s hanno entrambe $(0,1,1)$ come parametri direttori, per cui esse sono parallele. Dato che:

$$s\colon \begin{cases} x=0 \\ y=z+1, \end{cases}$$

prendiamo il punto $P=(0,1,0)\in s$. Il piano contenente r e s è il piano contenente r e P. I piani che contengono r hanno equazione:

$$\lambda(x-y+z-1)+\mu(2x+y-z-1)=0$$

e, imponendo il passaggio per P, troviamo $\lambda=0$, per cui il piano contenente le due rette ha equazione $2x+y-z-1=0$.

Per calcolare la distanza tra le due rette, prendiamo un qualsiasi piano perpendicolare a entrambe, per esempio $\pi\colon y+z=0$. Se $H=\pi\cap r$ e $K=\pi\cap s$, allora $d(r,s)=\overline{HK}$. Da:

$$\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-z-1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{6} \\ z=\frac{1}{6} \end{cases}$$

vediamo che $H=(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{6})$. Analogamente, da:

$$\begin{cases} y+z=0 \\ y=z+1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

vediamo che $K=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Dunque, $d(r,s)=\overline{HK}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) Le equazioni delle rette AB, CD, AC e BD sono, rispettivamente, $x = 1$, $x = 2$, $x + y = 0$ e $x - y = 0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$(x-1)(x-2) + h(x+y)(x-y) = 0 \Rightarrow (h+1)x^2 - hy^2 - 3x + 2 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -h & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = -2h^2 + \frac{1}{4}h$, vediamo che le coniche spezzate del fascio si ottengono per $h = \infty$, $h = 0$ e per $h = \frac{1}{8}$. In particolare, per $h = \frac{1}{8}$ la conica spezzata che troviamo è necessariamente $AD \cup BC$ e ha equazione:

$$(3x + y - 4)(3x - y - 4) = 0.$$

Dal momento che $|A| = -h(h+1)$, allora vediamo che per $-1 < h < 0$ abbiamo delle ellissi (tutte reali) e che per $h = -\frac{1}{2}$ abbiamo una circonferenza. Per $h = -1$ abbiamo una parabola. Per $h < -1$ e $h > 0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

La conica che passa per A, B, C, D ed E è la conica del fascio passante per E. Imponendo il passaggio troviamo $-h + 2 = 0$, cioè la conica cercata ha equazione $3x^2 - 2y^2 - 3x + 2 = 0$.

3) Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & -h & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -h & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & 0 \\ -h & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|B| = 2h^2 + 2h - 1$ e $|A| = -(h^2 + h - 1)$, allora vediamo che per $h = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, cioè abbiamo un cono. Per $h = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo $|A| = 0$ e $|B| > 0$, cioè abbiamo un paraboloide iperbolico. Inoltre:

$$P_A(T) = -T^3 + (h-1)T^2 + (h^2+1)T - h^2 - h + 1.$$

Quindi, il polinomio caratteristico non ha mai coefficienti di segno alterno o dello stesso segno, per cui per $h \neq \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo un iperboloide. In particolare, per $h < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e per $h > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, con $h \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, mentre per $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < h < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.