CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCAR-Z)- Ingegneria Industriale (SALE-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 28 Febbraio 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (h+1, h+1, h) \\ f(1,0,1) &= (2,3,2) \\ f(1,1,1) &= (h+2, h+2, h+2), \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare di h determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Studiare la semplicità di f e determinare, quando possibile, una base di autovettori.
3. Dato il sottospazio
$$V = \{(x,y,z) \mid x - y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
calcolare $f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$, verificare che $f(V) \subseteq V$ e dire in quali casi si ha l'uguaglianza.
4. Studiare, al variare di h, l'endomorfismo $f' : V \to V$ indotto da f, determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Im} f'$ e $\operatorname{Ker} f'$. Studiare le semplicità di f' e trovare, quando possibile, una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati la retta r ed il punto P:
$$r\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad P = (1,-2,1).$$
Determinare la circonferenza Γ descritta dal punto P con una rotazione intorno ad r. Trovare il cilindro che ha generatrici parallele ad r e per direttrice Γ.
2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare la circonferenza c che ha centro nell'origine e raggio $\sqrt{2}$ e la parabola p passante per i punti $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (2,4)$, $D = (-2,4)$. Studiare il fascio ϕ di coniche generato da c a da p, determinandone in particolare i punti base e le coniche spezzate.
3. Studiare la famiglia di quadriche di equazione:
$$x^2 + 2hxy + y^2 + z^2 - 2hz - 1 = 0$$
con h parametro reale.

SVOLGIMENTO, I

1. La matrice associata ad f rispetto alla base canonica si trova facilmente con tecniche standard:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ 2 & h-1 & 1 \\ 0 & h & 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } |M(f)| = -h-2$$

quindi se $h \neq -2$ f è un isomorfismo. Per $h = -2$ si ha $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,2,0),(1,1,2))$ e $\operatorname{Ker} f = \{(x,x,x)\}$.

2. Il polinomio caratteristico è

$$P(T) = -T^3 + (h+2)T^2 + T - h - 2 = 0 \quad \text{per } T = -1, 1, h+2$$

quindi se $h \neq -1, -3$ l'endomorfismo è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi.
$T = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & h & 1 \\ 2 & h & 1 \\ 0 & h & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{-1} = \mathscr{L}(u_1 = (h, -3, h));$$

$T = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ 2 & h-2 & 1 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \mathscr{L}(u_2 = (1,1,-h));$$

$T = h+2$

$$\begin{pmatrix} -h-1 & h & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & h & -h \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{h+2} = \mathscr{L}(u_3 = (1,1,1)).$$

Si osservi che i tre autovettori u_1, u_2, u_3 risultano linearmente indipendenti per $h \neq -1, -3$; quindi nei casi particolari ($h = -1, -3$) f non è semplice.

3. $V = \{(x,x,z)\}$ con base $v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,0,1)$. Naturalmente $f(V) = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2))$ e risulta

$$\begin{cases} f(v_1) = (h+1, h+1, h) \in V \\ f(v_2) = (1,1,2) \in V \end{cases} \quad \text{che risultano indipendenti per } h \neq -2$$

quindi se $h \neq -2$ $f(V) = V$ mentre se $h = -2$ si ha $f(V) = \mathscr{L}(1,1,2) \subsetneq V$.

4. Usando in V la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2]$ si ha

$$\begin{cases} f'(v_1) = f(v_1) = (h+1)v_1 + hv_2 \\ f'(v_2) = f(v_2) = v_1 + 2v_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M^{\mathscr{A}}(f') = \begin{pmatrix} h+1 & 1 \\ h & 2 \end{pmatrix}$$

e per $h \neq -2$ f' è un isomorfismo. Per $h = -2$ si ha $\operatorname{Im} f' = \mathscr{L}(1,2) = \mathscr{L}(v_1 + 2v_2)$, $\operatorname{Ker} f' = \{(x,x\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2) = \operatorname{Ker} f$.
Gli autovalori di f' sono $1, h+2$ che risultano distinti per $h \neq -1$. In questo caso f' è semplice e gli autospazi associati sono generati da u_2 ed u_3 rispettivamente. Per $h = -1$ f' non è semplice.

II

1. La circonferenza Γ si può trovare come intersezione del piano π passante per P ed ortogonale ad $\mathbb{R}$ con la sfera che ha centro nel punto $r \cap \pi = O$ e raggio $\overline{OP} = \sqrt{6}$. Quindi

$$\Gamma : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Gamma : \begin{cases} z = -x - y \\ x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Detta s la generica retta parallela ad $\mathbb{R}$, sechiamo s col piano π ed imponiamo al punto S così ottenuto di appartenere a Γ.

$$\begin{cases} x - y = h \\ x - z = k \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow S \equiv \left(\frac{h+k}{3}, \frac{k-2h}{3}, \frac{h-2k}{3} \right) \in \Gamma$$

$$(h+k)^2 + (h+k)(k-2h) + (k-2h)^2 - 27 = 0 \;\Rightarrow\quad h^2 - hk + k^2 - 9 = 0$$

eliminando i parametri h e k si ottiene l'equazione del cilindro

$$(x-y)^2 - (x-y)(x-z) + (x-z)^2 - 9 = 0.$$

2. Ci poniamo sul piano $z = 0$. La circonferenza c ha equazione $x^2 + y^2 - 2 = 0$. Per trovare la parabola usiamo il fascio determinato dai punti assegnati, mediante due coniche spezzate.

$$\begin{array}{ll} AB \cup CD: & (y-1)(y+2) = 0 \\ AC \cup BD: & (3x-y-2)(3x+y+2) = 0 \end{array} \qquad h(y-1)(y+2) + (3x-y-2)(3x+y+2) = 0.$$

Questo fascio contiene solo una parabola, per $h = 1$, e si ha $p:\; x^2 - y = 0$. Quindi il fascio richiesto ha equazione:

$$\phi:\; (k+1)x^2 + y^2 - ky - 2 = 0 \quad \text{con } |B| = -\frac{1}{4}(k+1)(k^2+8),\; |A| = k+1$$

quindi le tre coniche spezzate si hanno per $k = -1, \pm 2\sqrt{2}i$. Solo la prima è reale ed ha equazione $(y-1)(y+2) = 0$; per trovare i punti base sechiamo questa conica con la parabola p:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow\; (\pm 1, 1); \qquad \begin{cases} y = -2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow\; (\pm\sqrt{2}i, -2).$$

Per le coniche irriducibili di ϕ avremo:

- $k > -1$ ELLISSI. Per $k = 0$ si ha la circonferenza c;
- $k < -1$ IPERBOLI. Per $k = -2$ si ha l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - 2y + 2 = 0$;
- $k = -1$ spezzata.

L'unica parabola del fascio è p che si ottiene per $k = \infty$.

3. Dalla matrice B associata alla quadrica ricaviamo gli invarianti ortogonali:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ h & 1 & o & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & -h & -1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} |B| = (h^2+1)(h^2-1) \\ \\ |A| = 1 - h^2 \end{array}$$

in particolare in questa famiglia non ci sono paraboloidi. Per $h = \pm 1$ si hanno due cilindri ellittici di vertici $(1, \mp 1, 0, 0)$ rispettivamente, mentre per $h \neq \pm 1$ si hanno quadriche non degeneri che saranno ellissoidi o iperboloidi. Quindi l'equazione ridotta di queste quadriche è del primo tipo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \qquad \text{con } \delta = -\frac{|B|}{|A|} = 1 + h^2 > 0$$

Il polinomio caratteristico della sottomatrice A é

$$(1-T)(T^2 - 2T + 1 - h^2)$$

quindi, usando la regola dei segni di Cartesio, vediamo che per $-1 < h < 1$ si hanno tre autovalori positivi. Di conseguenza si ha la seguente classificazione:

- $-1 < h < 1$ ELLISSOIDI REALI. Per $h = 0$ si ha la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$;
- $h < -1$, $h > 1$ IPERBOLOIDI che sono iperbolici perché $|B| > 0$.