Ingegneria Civile e Ambientale, Compito di **Algebra Lineare e Geometria** del 26/6/12

Ia

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le assegnazioni

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h+1, h+2, h+1) \\ f(1,0,1) &= (h+3, 4, h+1) \qquad \text{con } h \text{ parametro reale} \\ f(2,1,0) &= (2h, h, 0) \end{aligned}$$

1) Studiare f determinando nucleo e immagine di f al variare di h.
2) Studiare la semplicità di f al variare di h e verificare che esiste una base di autovettori indipendente dal parametro.
3) Determinare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(1,2,1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (1,2,1)\}$$

Ib

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare euclideo è dato il sottospazio

$$W = \{(x,y,z,t) \mid x - y + z = y + z - t = 0\}.$$

Determinare il sottospazio $W^\perp$, una base ortogonale di W ed una base ortogonale di $W^\perp$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} z + 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} ; \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

determinare la retta $\mathbf{t}$ ortogonale ed incidente con $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$. Verificare che queste tre rette sono mutuamente ortogonali. Posto $R = \mathbf{r} \cap \mathbf{t}$ ed $S = \mathbf{s} \cap \mathbf{t}$ determinare i punti $H \in \mathbf{r}$ tali che il triangolo RSH abbia area $\sqrt{5}$.
2) Nel piano coordinato $z = 0$ determinare la circonferenza $\mathbf{c}$ di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$ e l'iperbole Γ che ha per asintoti gli assi cartesiani, giace nel primo e nel terzo quadrante e seca $\mathbf{c}$ in due punti ciascuno contato due volte. Studiare il fascio di coniche generato da $\mathbf{c}$ e da Γ, trovandone in particolare i punti base e le coniche spezzate.
3) Studiare la famiglia di quadriche di equazione

$$x^2 + 2xy + 2kyz - z^2 + 2ky = 0 \qquad \text{con } k \text{ parametro reale.}$$

SVOLGIMENTO, Ia

1) la matrice associata ad f rispetto alla base canonica si trova facilmente

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & -2 & 2 \\ 1 & h-2 & 3 \\ 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } |M(f)| = h(h^2-1)$$

quindi se $h \neq 0, \pm 1$ f è un isomorfismo. Consideriamo i casi particolari.
$h = 0$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,1,0),(0,1,1)) \\ \operatorname{Ker} f = \{(2y, y, 0)\} \end{array}$$

$h = 1$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((2,1,0),(0,1,1)) \\ \operatorname{Ker} f = \{(x,x,0)\} \end{array}$$

$h = -1$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,0),(0,1,0)) \\ \operatorname{Ker} f = \{(0,y,y)\} \end{array}$$

2) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f

$$\begin{vmatrix} h+1-T & -2 & 2 \\ 1 & h-2-T & 3 \\ 0 & 0 & h+1-T \end{vmatrix} = (h+1-T)(T^2-(2h-1)T+h^2-h).$$

Gli autovalori si trovano facilmente $T = h, h-1, h+1$. Siccome questi autovalori sono sempre distinti, f risulta semplice per ogni h. Il calcolo degli autospazi non presenta problemi, si ottengono gli autospazi:

$T = h,\ V_h = \{(2y,y,0)\}$ con base $u_1 = (2,1,0)$;

$T = h-1,\ V_{h-1} = \{(x,x,0)\}$ con base $u_2 = (1,1,0)$;

$T = h+1,\ V_{h+1} = \{(0,y,y)\}$ con base $u_3 = (0,1,1)$.

Si noti che la base trovata è indipendente dal parametro.
3) Bisogna risolvere il sistema lineare la cui matrice completa è

$$(A,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} h+1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & h-2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & h+1 & 1 \end{array}\right).$$

Se $h \neq 0, \pm 1$ si ha $\rho(A) = \rho(A,B) = 3$, quindi il sistema ammette una sola soluzione che si può trovare con la regola di Cramer:

$$f^{-1}(1,2,1) = \left\{ \left(\frac{1}{h-1}, \frac{2h}{h^2-1}, \frac{1}{h+1} \right) \right\}.$$

Consideriamo i casi particolari.

$$h = 0: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \rho(A) = \rho(A,B) = 2, \quad f^{-1}(1,2,1) = \{(2y-1,y,1)\};$$

$$h = 1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \rho(A) = 2,\ \rho(A,B) = 3, \quad f^{-1}(1,2,1) = \varnothing;$$

$$h = -1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \rho(A) = 2,\ \rho(A,B) = 3, \quad f^{-1}(1,2,1) = \varnothing.$$

Ib

Cominciamo col calcolare una base di W:

$$W = \{(y - z, y, z, y + z)\} \quad \text{con base } w_1 = (1, 1, 0, 1),\ w_2 = (-1, 0, 1, 1)$$

ed osserviamo che la base trovata è ortogonale. Imponendo al generico vettore $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ di essere ortogonale a questi vettori otteniamo:

$$\begin{cases} x + y + t = 0 \\ -x + z + t = 0 \end{cases} \quad W^\perp = \{(x, -x - t, x - t, t)\} \text{ con base } w_3 = (1, -1, 1, 0),\ w_4 = (0, -1, -1, 1)$$

Osserviamo infine che i vettori w_3, w_4 sono ortogonali.

II

1) Nel fascio φ_r determiniamo il piano π parallelo ad $\mathbf{s}$ imponendo il passaggio per il suo punto improprio $S_\infty \equiv (2, -1, 0, 0)$:

$$\varphi_r : \lambda(2x - y) + \mu(z + 1) = 0 \quad S_\infty \Rightarrow \lambda = 0, \quad \pi : z + 1 = 0.$$

Detto $P \equiv (2\beta, -\beta, 1) \in \mathbf{s}$ il punto generico, cerchiamo la retta per P ortogonale a π incidente con $\mathbf{r}$:

$$\begin{cases} x = 2\beta \\ y = -\beta \\ z = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{t} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dai rispettivi punti impropri $R_\infty \equiv (1, 2, 0, 0)$, $S_\infty \equiv (2, -1, 0, 0)$, $T_\infty \equiv (0, 0, 1, 0)$ si verifica subito che le rette sono ortogonali. Con facili calcoli si trova $R \equiv (0, 0, -1)$, $S \equiv (0, 0, 1)$, con $\overline{RS} = 2$. Posto $H \equiv (\alpha, 2\alpha, -1) \in \mathbf{r}$, si ha $\overline{RH} = \sqrt{5\alpha^2}$; siccome RS ed RH sono i cateti del triangolo RSH, si ha:

$$RS \cdot RH = 2\sqrt{5\alpha^2} = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad H \equiv (\pm 1, \pm 2, -1).$$

2) L'equazione di $\mathbf{c}$ si trova facilmente: $x^2 + y^2 - 2 = 0$. L'iperbole Γ appartiene al fascio $xy = k$, con $k > 0$. Per determinare l'iperbole richiesta intersechiamo questo fascio con $\mathbf{c}$:

$$\begin{cases} y = \frac{k}{x} \\ x^2 + \frac{k^2}{x^2} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^4 - 2x^2 + k^2 = 0. \quad \Delta = 0 \Rightarrow k = 1.$$

In particolare Γ e $\mathbf{c}$ si secano nei punti $(\pm 1, \pm 1)$, ciascuno contato due volte. Il fascio da studiare ha equazione

$$\phi : x^2 + hxy + y^2 - k - 2 = 0 \quad \text{con } B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{2} & 0 \\ \frac{h}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h - 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} |B| = \frac{1}{4}(h + 2)^2(h - 2) \\ \\ |A| = \frac{1}{4}(4 - h^2). \end{array}$$

Le coniche spezzate sono:
$h = 2 \quad (x + y)^2 - 4 = 0 \quad (x + y - 2)(x + y + 2) = 0,$
$h = -2 \quad (x - y)^2 = 0.$
Naturalmente i punti base, che si possono ritrovare facilmente, sono quelli già noti.

Studiamo le coniche irriducibili del fascio, tra le quali non ci sono parabole.

- $|A| > 0\,, \quad -2 < h < 2$ ELLISSI. Per $h = 0$ si trova $\mathbf{c}$.

- $|A| < 0\,, \quad h < -2,\, h > 2$ IPERBOLI. L'iperbole equilatera Γ si ha per $h = \infty$.

3) Osserviamo subito che le quadriche sono tutte reali, in quanto passano tutte per l'origine. Consideriamo la matrice associata alla generica quadrica della famiglia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k & k \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} |B| &= k^2 \\ |A| &= 1 - k^2 \end{aligned}$$

ed osserviamo che $|B| \geq 0$, cioè le quadriche non degeneri della famiglia hanno punti iperbolici. Per $k = 0$ si ha il cono $x^2 + 2xy - z^2 = 0$ con vertice in O; per $k = \pm 1$ si hanno due paraboloidi iperbolici. Le rimanenti quadriche sono tutte iperboloidi iperbolici.