CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCAR-Z)- Ingegneria Industriale (SALE-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 25 Settembre 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$, è assegnata la seguente applicazione lineare $\boldsymbol{f} \colon \mathbb{R}^4 \to \boldsymbol{V}$:

$$f(x,y,z,t) = ((h-1)x + y - z + t, -3x + 2y - z + 2t, (2h-2)x + (h+1)y - hz + t, 3hx + hy - hz),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Dati $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x - 4z - 2t = 0,\ x + y - 2z = 0\}$ e $U = \mathscr{L}((1,1,-1,-1),(2,-1,2,5))$, determinare il valore di h per il quale $f(W) = U$.
3) Studiare la semplicità della restrizione $\varphi = f|_V \colon V \to V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4) Determinare $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare di V indotto dal prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$, cioè determinare:
$$W^\perp = \{v \in V \mid v \perp W\}.$$

Soluzione

1) Dato che:
$$V = \{(x,y,z,x-y+z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)),$$
vediamo che $\mathscr{A} = [(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)]$ è una base di V e che, inoltre:
$$[(x,y,z,x-y+z)]_{\mathscr{A}} = (x,y,z)$$
per ogni $(x,y,z,x-y+z) \in V$. Quindi, essendo:
$$\begin{aligned} f(e_1) &= (h-1,-3,2h-2,3h) \\ f(e_2) &= (1,2,h+1,h) \\ f(e_3) &= (-1,-1,h,h) \\ f(e_4) &= (1,2,1,0), \end{aligned}$$
vediamo che:
$$\begin{aligned} [f(e_1)]_{\mathscr{A}} &= [(h-1,-3,2h-2,3h)]_{\mathscr{A}} = (h-1,3,2h-2) \\ [f(e_2)]_{\mathscr{A}} &= [(1,2,h+1,h)]_{\mathscr{A}} = (1,2,h+1) \\ [f(e_3)]_{\mathscr{A}} &= [(-1,-1,h,h)]_{\mathscr{A}} = (-1,-1,-h) \\ [f(e_4)]_{\mathscr{A}} &= [(1,2,1,0)]_{\mathscr{A}} = (1,2,1). \end{aligned}$$
Questo vuol dire che:
$$M^{\mathcal{E},\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} h-1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2h-2 & h+1 & -h & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} h-1 & 1 & -1 & 1 \\ -2h-1 & 0 & 1 & 0 \\ 2h-2h^2 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per $h \neq 0$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f)) = 3$, cioè $\operatorname{Im} f = V$ e f è suriettiva. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 4 - 3 = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (h-1)x + y - z + t = 0,\ (-2h-1)x + z = 0,\ (2h - 2h^2)x + hy = 0\} = \\ = \mathscr{L}((1, 2h-1, 2h+1, 3-h)).\end{aligned}$$

Per $h = 0$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathcal{E},\mathscr{A}}(f)) = 2$. In tal caso:

$$M^{\mathcal{E},\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base di $\operatorname{Im} f$ è data dalle prime due colonne, cioè:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(f(e_1), f(e_2)) = \mathscr{L}((-1,-3,-2,0),(1,2,1,0)).$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 4 - 2 = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - z + t = 0,\ -x + t = 0\}.$$

2) Dal momento che:

$$W = \{(x, -x + 2z, z, \tfrac{5}{2}x - 2z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((2,-2,0,5),(0,2,1,-2)),$$

allora:

$$f(W) = \mathscr{L}(f(2,-2,0,5), f(0,2,1,-2)) = \mathscr{L}((2h+1, 0, 2h-1, 4h), (-1,-1,h,h)).$$

Per vedere quando $f(W) = U$ abbiamo bisogno delle equazioni cartesiane di U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ x - 4y - 3z & 0 & 0 & -3y - 4z + t \end{pmatrix},$$

per cui:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 4y - 3z = 0,\ 3y + 4z - t = 0\}.$$

Intanto vogliamo che sia $f(W) \subseteq U$, cioè vogliamo che $(2h+1, 0, 2h-1, 4h), (-1,-1,h,h) \in U$, cioè che verifichino le equazioni cartesiane di U, per cui deve essere:

$$\begin{cases} 2h + 1 - 6h + 3 = 0 \\ 8h - 4 - 4h = 0 \\ -1 + 4 - 3h = 0 \\ -3 + 4h - h = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 1.$$

Dunque, per $h = 1$ $f(W) = \mathscr{L}((3,0,1,4),(-1,-1,1,1)) \subseteq U$. Inoltre, è evidente che $\dim U = 2$ e che $\dim f(W) = 2$, in quanto $(3,0,1,4), (-1,-1,1,1)$ sono linearmente indipendenti. Quindi, per $h = 1$ $f(W) = U$.

3) Ricordiamo che $\mathscr{A} = [(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,1)]$. Quindi, per scrivere $M^{\mathscr{A}}(\varphi)$ dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} f(1,0,0,1) &= (h, -1, 2h-1, 3h) \\ f(0,1,0,-1) &= (0,0,h,h) \\ f(0,0,1,1) &= (0,1,1-h,-h). \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
[f(1,0,0,1)]_{\mathscr{A}} &= [(h,-1,2h-1,3h)]_{\mathscr{A}} = (h,-1,2h-1)\\
[f(0,1,0,-1)]_{\mathscr{A}} &= [(0,0,h,h)]_{\mathscr{A}} = (0,0,h)\\
[f(0,0,1,1)]_{\mathscr{A}} &= [(0,1,1-h,-h)]_{\mathscr{A}} = (0,-1,1-h).
\end{aligned}$$

Quindi:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2h-1 & h & 1-h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 0 & 0 \\ -1 & -T & 1 \\ 2h-1 & h & 1-h-T \end{vmatrix} = (h-T)(T+h)(T-1).$$

Quindi, gli autovalori sono $1, h, -h$. Per $h \neq 0, 1, -1$ sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1, per cui per $h \neq 0, 1, -1$ φ è semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 0 con $m_0 = 2$ e 1 con $m_1 = 1$. Dato che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 1$, necessariamente si ha $\dim V_1 = 1$. Quindi, φ è semplice se $\dim V_0 = m_0 = 2$.

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_0 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(\varphi)) = 3 - 1 = 2 = m_0$. Quindi, per $h = 0$ φ è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 con $m_1 = 2$ e -1 con $m_{-1} = 1$. Dato che $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, necessariamente si ha $\dim V_{-1} = 1$. Quindi, φ è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(\varphi) - I) = 3 - 1 = 2 = m_1$. Quindi, per $h = 1$ φ è semplice.

Sia $h = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 con $m_1 = 2$ e -1 con $m_{-1} = 1$. Dato che $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, necessariamente si ha $\dim V_{-1} = 1$. Quindi, φ è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$.

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(\varphi) - I) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$. Quindi, per $h = 1$ φ non è semplice.

4) Dal momento che $W = \mathscr{L}((2,-2,0,5),(0,2,1,-2))$, allora il complemento ortogonale di W in V rispetto al prodotto scalare indotto da quello euclideo di $\mathbb{R}^4$ è:

$$\begin{aligned}
&W = \{v \in V \mid v \cdot (2,-2,0,5) = 0,\ v \cdot (0,2,1,-2) = 0\} = \\
&= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0,\ 2x - 2y + 5t = 0,\ 2y + z - 2t = 0\} = \mathscr{L}((-13,-3,14,4)).
\end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato il punto $P = (1,0,0)$ e il piano $\pi\colon x + z = 0$, determinare il luogo delle rette passanti per P che formano con il piano π un angolo di $\frac{\pi}{6}$.

2) Nel piano $z = 0$ studiare il fascio di coniche di equazione:

$$(h-1)x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 2hy = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Determinare il cilindro Q di vertice $V = (1, 2, 1, 0)$ contenente la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} z = 0 \\ 10x^2 - y^2 = 4. \end{cases}$$

Dati i piani $\pi_1\colon 3x - y - z = 0$ e $\pi_2\colon 3x - y + 2z = 0$, determinare la natura delle coniche $\Gamma_1 = Q \cap \pi_1$ e $\Gamma_2 = Q \cap \pi_2$.

Soluzione

1) La generica retta per P ha equazione:

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

Il vettore perpendicolare al piano π ha componenti $(1, 0, 1)$. La retta e il piano formano un angolo di $\frac{\pi}{6}$ se il vettore perpendicolare al piano e quello parallelo alla retta formano un angolo di $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Quindi, deve essere:

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{l+n}{\sqrt{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \Rightarrow l^2 - m^2 + n^2 + 4ln = 0.$$

Dividendo per n^2 troviamo:

$$\frac{l^2}{n^2} - \frac{m^2}{n^2} + 1 + 4\frac{l}{n} = 0.$$

Da:

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

otteniamo $\frac{l}{n} = \frac{x-1}{z}$ e $\frac{m}{n} = \frac{y}{z}$. Sostituendo abbiamo:

$$\frac{(x-1)^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} + 1 + 4\frac{x-1}{z} = 0,$$

da cui otteniamo l'equazione del luogo cercato:

$$(x-1)^2 - y^2 + z^2 + 4(x-1)z = 0.$$

2) Le matrici associate al fascio di coniche sono:

$$B = \begin{pmatrix} h-1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -h \\ -1 & -h & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h-1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

per cui $|B| = (4 - h^2)(h-1)$ e $|A| = 4h - 8$. Per $h = 1, 2, -2$ abbiamo le coniche spezzate del fascio:

$$\begin{aligned} h = 1\colon & \; 4y^2 + 4xy - 2x - 2y = 0 \Rightarrow (x+y)(2y-1) = 0 \\ h = 2\colon & \; x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y = 0 \Rightarrow (x+2y)(x+2y-2) = 0 \\ h = -2\colon & \; -3x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x + 4y = 0 \Rightarrow (3x+2y+2)(x-2y) = 0. \end{aligned}$$

I punti base del fascio sono dati da:

$$\begin{cases} (x+y)(2y-1) = 0 \\ (x+2y)(x+2y-2) = 0, \end{cases}$$

per cui sono $(0,0), (-2,2), (-1,\frac{1}{2}), (1,\frac{1}{2})$.

Potendo scrivere l'equazione del fascio nella forma:

$$h(x^2 - 2y) - x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x = 0,$$

vediamo che per $h = \infty$ otteniamo la parabola di equazione $x^2 - 2y = 0$. Dal fatto che $|A| = 4(h-2)$ segue che:

- per $h > 2$ si ha $|A| > 0$: abbiamo delle ellissi reali, tra le quali non vi sono circonferenze, in quanto a_{12} è sempre non nullo;
- per $h = 2$ non abbiamo una parabola, in quanto per tale valore abbiamo una conica spezzata;
- per $h < 2$, con $h \neq 1, -2$, abbiamo $|A| < 0$: abbiamo delle iperboli; per $h = -3$ abbiamo un'iperbole equilatera, in quanto per $h = -3$ si ha $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

3) Il generico punto della conica Γ è $P = (\alpha, \beta, 0)$, con $10\alpha^2 - \beta^2 = 4$. La retta PV ha equazioni:

$$x - \alpha = \frac{y - \beta}{2} = z \Rightarrow \begin{cases} x - \alpha = z \\ y - \beta = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y - 2z. \end{cases}$$

Sostituendo in $10\alpha^2 - \beta^2 = 4$ troviamo l'equazione del cilindro Q cercato:

$$10(x - z)^2 - (y - 2z)^2 = 4.$$

La conica Γ_1 ha equazioni:

$$\begin{cases} 10(x - z)^2 - (y - 2z)^2 = 4 \\ 3x - y - z = 0. \end{cases}$$

Essa è certamente spezzata, in quanto $V \in \pi_1$:

$$\Gamma_1\colon \begin{cases} y = 3x - z \\ (x - z)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - z \\ (x - z + 2)(x - z - 2) = 0. \end{cases}$$

In particolare, Γ_1 si spezza in due rette distinte. Per quel che riguarda Γ_2 essa ha equazioni:

$$\begin{cases} 10(x - z)^2 - (y - 2z)^2 = 4 \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$$

Dal momento che $V \notin \pi_2$, possiamo dire che Γ_2 è certamente irriducibile. Inoltre, essendo Γ un'iperbole (la sua equazione è in forma canonica), Q è un cilindro iperbolico, per cui anche Γ_2 è necessariamente un'iperbole.