CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCAR-Z)- Ingegneria Industriale (SALE-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 22 Giugno 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{aligned} f(1,1,0,0) &= (h+1,1,0,1) \\ f(0,0,1,1) &= (h+1,1-h,h+2,3) \\ f(0,0,0,1) &= (1,1,1,2) \\ f(0,1,1,0) &= (2h,1-h,h,2), \end{aligned}$$

dove $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f, determinando $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2) Dato $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\, 2z-t=0\}$, determinare $f^{-1}(U)$, specificandone la dimensione.
3) Dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0\}$, determinare il valore di h per il quale la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ e verificare che g è semplice.
4) Data la base $\mathscr{A} = [(1,1,1),(0,1,1),(1,0,1)]$ di $\mathbb{R}^3$, determinare il prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ per il quale $\mathscr{A}$ è una base ortonormale.

Soluzione

1) Da:

$$\begin{aligned} f(1,1,0,0) &= (h+1,1,0,1) \\ f(0,0,1,1) &= (h+1,1-h,h+2,3) \\ f(0,0,0,1) &= (1,1,1,2) \\ f(0,1,1,0) &= (2h,1-h,h,2), \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_2) = (h+1,1,0,1) \\ f(e_3)+f(e_4) = (h+1,1-h,h+2,3) \\ f(e_4) = (1,1,1,2) \\ f(e_2)+f(e_3) = (2h,1-h,h,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (1,0,1,0) \\ f(e_2) = (h,1,-1,1) \\ f(e_3) = (h,-h,h+1,1) \\ f(e_4) = (1,1,1,2). \end{cases}$$

Quindi:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & h & 1 \\ 0 & 1 & -h & 1 \\ 1 & -1 & h+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $|M(f)| = -h(2h+3)$. Questo significa che per $h \neq 0, -\frac{3}{2}$ si ha $|M(f)| \neq 0$, cioè f è un isomorfismo, il che vuol dire che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e, dal momento che gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano nella prima, seconda e quarta colonna, concludiamo che:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,1,0),(0,1,-1,1),(1,1,1,2)).$$

Poi, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0,\ y + t = 0,\ -y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1,-1)).$$

Sia $h = -\frac{3}{2}$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e, dal momento che gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano nella prima, seconda e quarta colonna, concludiamo che:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,1,0),(-\tfrac{3}{2},1,-1,1),(1,1,1,2)).$$

Poi, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - \tfrac{3}{2}y - \tfrac{3}{2}z + t = 0,\ y + \tfrac{3}{2}z + t = 0,\ \tfrac{1}{2}y + z = 0\} = \mathscr{L}((-4,-4,2,1)).$$

2) Da:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & h & 1 \\ 0 & 1 & -h & 1 \\ 1 & -1 & h+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + hy + hz + t \\ y - hz + t \\ x - y + (h+1)z + t \\ y + z + 2t \end{pmatrix}$$

vediamo che:

$$f(x,y,z,t) = (x + hy + hz + t, y - hz + t, x - y + (h+1)z + t, y + z + 2t).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) \in U\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x+hy+hz+t) - (y-hz+t) = 0,\ 2[x-y+(h+1)z+t] - (y+z+2t) = 0\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + (h-1)y + 2hz = 0,\ 2x - 3y + (2h+1)z = 0\}. \end{aligned}$$

Per stabilire la $\dim f^{-1}(U)$ dobbiamo calcolare il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 2h & 0 \\ 2 & -3 & 2h+1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 2h & 0 \\ 0 & -2h-1 & -2h+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $-2h-1$ e $-2h+1$ non sono mai contemporaneamente nulli si ha $\rho(A) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e dunque:

$$\dim f^{-1}(U) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \rho(A) = 4 - 2 = 2$$

per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3) Dal momento che:

$$V = \{(x, x, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)),$$

allora:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((h+1,1,0,1),(h,-h,h+1,1),(1,1,1,2)).$$

La restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ se e solo se $f(V) \subseteq V$, cioè se e solo se $(h+1,1,0,1),(h,-h,h+1,1),(1,1,1,2) \in V$:

$$\begin{gathered}(h+1,1,0,1) \in V \Leftrightarrow h+1-1=0 \Leftrightarrow h=0\\ (h,-h,h+1,1) \in V \Leftrightarrow h+h=0 \Leftrightarrow h=0\\ (1,1,1,2) \in V, \text{perché } 1-1=0.\end{gathered}$$

Quindi, per $h=0$ $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ ed esso è tale che:

$$\begin{gathered}g(1,1,0,0) = f(1,1,0,0) = (1,1,0,1)\\ g(0,0,1,0) = f(0,0,1,0) = (0,0,1,1)\\ g(0,0,0,1) = f(0,0,0,1) = (1,1,1,2).\end{gathered}$$

Sia $\mathscr{B} = [(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$. Dal momento che:

$$\begin{gathered}[g(1,1,0,0)]_{\mathscr{B}} = [f(1,1,0,0)]_{\mathscr{B}} = [(1,1,0,1)]_{\mathscr{B}} = (1,0,1)\\ [g(0,0,1,0)]_{\mathscr{B}} = [f(0,0,1,0)]_{\mathscr{B}} = [(0,0,1,1)]_{\mathscr{B}} = (0,1,1)\\ [g(0,0,0,1)]_{\mathscr{B}} = [f(0,0,0,1)]_{\mathscr{B}} = [(1,1,1,2)]_{\mathscr{B}} = (1,1,2),\end{gathered}$$

allora:

$$M^{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1\\ 0 & 1-T & 1\\ 1 & 1 & 2-T \end{vmatrix} = -T(T-1)(T-3),$$

gli autovalori di g sono $0,1,3$: essendo tutti distinti di molteplicità algebrica 1 concludiamo subito che g è semplice.

4) Dal momento che:

$$[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (x+y-z, -x+z, -y+z),$$

allora il prodotto scalare cercato è:

$$\begin{aligned}(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) &= (x_1+y_1-z_1)(x_2+y_2-z_2) + (-x_1+z_1)(-x_2+z_2) + (-y_1+z_1)(-y_2+z_2) =\\ &= 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 2y_1y_2 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1 + 3z_1z_2.\end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Data la retta:

$$r\colon \begin{cases} x-y+z-1=0\\ 2x+y-z+1=0, \end{cases}$$

dato il piano $\pi\colon x-z+1=0$ e dato il punto $P=(1,0,1)$, determinare la retta s passante per P e ortogonale a π e la retta t passante per P, ortogonale a r e parallela a π.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $r\colon x - y + 1 = 0$ nel punto $A = (0, 1)$ e alla retta $s\colon 2x - y = 0$ nell'origine $O = (0, 0)$. Determinare una forma canonica della conica del fascio passante per il punto $(-2, 0)$.

3) Determinare il cilindro avente le generatrici parallele alla retta $x = 2y = 2z$ e contenenti la conica di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1) Un vettore ortogonale al piano π ha componenti $(1, 0, -1)$. Esso sarà anche parallelo alla retta s che avrà equazioni:

$$s\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

I parametri direttori della retta r sono:

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 3, 3).$$

Quindi, possiamo prendere come parametri direttori della retta r $(0, 1, 1)$. Se (l, m, n) sono parametri direttori di t, allora deve essere:

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ l - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = n \\ m = -n. \end{cases}$$

Dunque, parametri direttori di t sono $(1, -1, 1)$ e t ha equazioni:

$$t\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

2) Le coniche spezzate del fascio sono $(x - y + 1)(2x - y) = 0$ e $x^2 = 0$, dal momento che AO ha equazione $x = 0$. Quindi, l'equazione del fascio di coniche è:

$$(x - y + 1)(2x - y) + hx^2 = 0 \Rightarrow (h + 2)x^2 - 3xy + y^2 + 2x - y = 0.$$

Sappiamo già che le uniche coniche spezzate del fascio si hanno per $h = 0$ e per $h = \infty$. Quindi, possiamo passare direttamente a:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = h - \tfrac{1}{4}.$$

Quindi:

- per $h > \frac{1}{4}$ abbiamo $|A| > 0$ e $|B| \neq 0$: quindi abbiamo delle ellissi; non ci sono circonferenze, perché $a_{12} \neq 0$ per ogni h;
- per $h = \frac{1}{4}$ abbiamo $|A| = 0$ e $|B| \neq 0$: abbiamo una parabola;
- per $h < \frac{1}{4}$, con $h \neq 0$, abbiamo $|A| < 0$ e $|B| \neq 0$: abbiamo delle iperboli; dato che $\mathrm{Tr}(A) = h + 3$, per $h = -3$ abbiamo un'iperbole equilatera.

Cerchiamo, ora, la conica del fascio passante per $(0, -2)$, imponendo il passaggio nell'equazione del fascio di coniche:

$$4(h + 2) - 4 = 0 \Rightarrow h = -1.$$

Quindi, la conica cercata è un'iperbole (in quanto $-1 < \frac{1}{4}$) equazione:

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2x - y = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = \frac{1}{4}$ e $|A| = -\frac{5}{4}$, allora nella forma canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$ si ha:

$$\gamma = -\tfrac{|B|}{|A|} = \tfrac{1}{5}.$$

α e β sono gli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1-T \end{vmatrix} = \frac{4T^2 - 8T - 5}{4} = 0 \Leftrightarrow T = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad T = -\frac{1}{2}.$$

Ponendo $\alpha = \frac{5}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, troviamo una forma canonica dell'iperbole:

$$\frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = \frac{1}{5}.$$

3) Il vertice del cilindro è il punto improprio della retta:

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2y = 2z, \end{cases}$$

cioè $V = (2, 1, 1, 0)$. Sia $P = (\alpha, \beta, 0)$ un punto della conica, cioè:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1 = 0.$$

La retta PV ha equazione:

$$\frac{x-\alpha}{2} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x - \alpha = 2z \\ y - \beta = z. \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} \alpha = x - 2z \\ \beta = y - z. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1 = 0$ troviamo l'equazione del cilindro:

$$(x-2z)^2 + (y-z)^2 - 2(x-2z)(y-z) + 3(x-2z) - 1 = 0.$$