Ingegneria Civile e Ambientale, Ingegneria Gestionale, Ingegneria REA, Ingegneria Informatica, Ingegneria delle Telecomunicazioni, Compito di **Algebra Lineare e Geometria** del 21/4/12

I

Dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$, $v_3 = (0,1,1,0)$, $v_4 = (1,0,0,1)$, sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \mathbb{R}^4$.
1) Trovare l'equazione cartesiana di V e verificare che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V.
2) Studiare l'endomorfismo $f : V \to V$ dato da

$$\begin{cases} f(v_1) = (h-2)v_1 + (h-1)v_2 + (h+1)v_3 \\ f(v_2) = (3-h)v_1 + (2-h)v_2 - (h+1)v_3 \\ f(v_3) = hv_3 \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
3) Dato il sottospazio $W = \{x, y, z, t) \mid x-t = y-z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$ verificare che $W \subseteq V$. Calcolare $f(W) = \{f(w) \mid w \in W\}$ e verificare che $f(W) \subseteq W$. Precisare in quali casi $f(W) = W$.
4) Studiare la semplicit di f al variare di h.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Dati i punti $A \equiv (1,-1,0)$, $B \equiv (2,-4,2)$, $P_\infty \equiv (0,1,-1,0)$ siano π il piano che li contiene ed $\mathbf{r}$ la retta che congiunge A con P_∞. Determinare il punto $C \in \mathbf{r}$ tale che il triangolo ABC sia rettangolo in B. Trovare il luogo dei punti $P \in \pi$ tali che il triangolo APC sia rettangolo, con ipotenusa AC.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio di coniche ϕ di equazione

$$\phi: \ (h+1)x^2 + 2xy + 2y^2 - 2hy = 0$$

determinando in particolare le sue coniche spezzate ed i suoi punti base. Determinare la conica di ϕ passante per il punto $(0, -\frac{1}{2})$ e trovare il suo vertice ed il suo asse.
3) Studiare la famiglia di quadriche di equazione

$$x^2 + 2hxy + y^2 + 2hxz + 2hyz - 1 = 0$$

SVOLGIMENTO, I

1) Consideriamo la matrice le cui righe sono i vettori dati ed il vettore generico

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & y-x & z-t & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y+z-t & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V = \{(x,y,z,t) \mid x-y+z-t = 0\} \\ v_1, v_2, v_3 \text{ sono linearmente indipendenti} \\ v_4 \in \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3) = V \end{array}$$

2) Possiamo scrivere subito la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h-2 & 3-h & 0 \\ h-1 & 2-h & 0 \\ h+1 & -h-1 & h \end{pmatrix} \qquad \text{con } \ |M^{\mathscr{A}}(f)| = -h$$

quindi se $h \neq 0$ f è un isomorfismo; per $h = 0$ si ha

$$\begin{array}{l} \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-2,-1,1)_{\mathcal{A}}, (3,2,-1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(-2v_1 - v_2 + v_3, 3v_1 + 2v_2 - v_3) \\ \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,0,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_3) \end{array}$$

3) $W = \{(x,y,y,x)\}$ con base $w_1 = (1,0,0,1) = v_4 \in V$, $w_2 = (0,1,1,0) = v_3 \in V$, quindi $W \subseteq V$. Naturalmente $f(W) = \mathscr{L}(f(w_1), f(w_2)) = \mathscr{L}((v_1 + v_2 - hv_3, hv_3)$. Siccome $v_4 = v_1 + v_2 - v_3$ e $f(w_1) = w_1 + (1-h)w_2 \in W$, $f(w_2) = hw_2 \in W$, si ha $f(W) \subseteq W$; per $h \neq 0$ questi due vettori sono indipendenti, quindi $f(W) = W$; per $h = 0$ $f(W) = \mathscr{L}(v_1 + v_2) \subsetneq W$.
4) Il polinomio caratteristico :

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-2 & 3-h & 0 \\ h-1 & 2-h & 0 \\ h+1 & -h-1 & h \end{vmatrix} = (h-T)(T^2-1)$$

e si trovano facilmente gli autovalori $T = \pm 1, h$. Se $h \neq \pm 1$ gli autovalori sono distinti, quindi f è semplice.
Per $h = 1$ f è semplice se $\dim V_1 = 2$:

$$T = 1 \ M^{\mathcal{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow \dim V_1 = 2.$$

Quindi, per $h = 1$ f è semplice. Sia $h = -1$. In questo caso f è semplice se $\dim V_{-1} = 2$:

$$T = -1 \quad M^{\mathcal{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow \dim V_{-1} = 2.$$

Quindi, anche per $h = -1$ f è semplice.

II

1) Imponendo al piano generico $ax + by + cz + d = 0$ il passaggio per i tre punti si ha

$$\begin{cases} A \to & a - b + d = 0 \\ B \to & 2a - 4b + 2c + d = 0 \\ P_\infty \to & b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a = b \\ b = c \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi : x + y + z = 0$$

mentre le equazioni di $\mathbf{r}$ si trovano facilmente

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{con punto generico } C \equiv (1, \beta, -1-\beta).$$

Le rette AB e BC hanno punti impropri $(AB)_\infty \equiv (1,-3,2,0)$, $(BC)_\infty \equiv (-1, \beta+4, -\beta-3, 0)$ quindi queste due rette sono ortogonali quando $5\beta = -19$, cioè $\beta = -\frac{19}{5}$. Di conseguenza $C \equiv (1, -\frac{19}{5}, \frac{14}{5})$. Il luogo richiesto è la circonferenza del piano π avente per diametro AC.

Per ottenerla possiamo secare col piano π la sfera avente centro nel punto medio di AC, $M \equiv (1, -\frac{12}{5}, \frac{7}{5})$ e raggio $\overline{AM} = \frac{7}{5}\sqrt{2}$, quindi

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (x-1)^2 + (y + \frac{12}{5})^2 + (z - \frac{7}{5})^2 = \frac{98}{25} \end{cases}$$

2) Dalla matrice associata alla generica conica si ha

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -h \\ 0 & -h & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = -h^2(h+1) \\ |A| = 2h+1 \end{array}$$

Le coniche spezzate sono:

- $h = 0 \quad x^2 + 2xy + 2y^2 = 0 \quad (x + (1+i)y)(x + (1-i)y) = 0$ (immaginaria),
- $h = -1 \quad xy + y^2 + y = 0 \quad y(x + y + 1) = 0$ (reale).

Secando la conica reale spezzata con la conica $x^2 - y = 0$ (una parabola) che si trova per $h = \infty$, si trovano i punti base

$$O \equiv (0,0) \text{ doppio}, \qquad \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2} \right)$$

Riguardo alle coniche irriducibili di ϕ avremo:

- $|A| > 0 \quad h > -\frac{1}{2}$ ELLISSI. Non ci sono circonferenze;
- $|A| < 0 \quad h < -\frac{1}{2}$ IPERBOLI. Per $h = -3$ iperbole equilatera: $x^2 - xy - y^2 - 3y = 0$;
- $|A| = 0 \quad h = -\frac{1}{2}$ PARABOLA $\mathbf{p}$: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y = 0$. Per $h = \infty$ parabola: $x^2 - y = 0$.

Imponendo il passaggio per il punto $(0, -\frac{1}{2})$ si ottiene la parabola $\mathbf{p}$: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y = 0$, il cui punto improprio è $P_\infty \equiv (2, -1, 0)$; il punto improprio ortogonale è $(1, 2, 0)$. Tra tutte le rette passanti per questo punto, cioé tra tutte le rette di equazione $y = 2x + k$, quella tangente alla parabola lo é nel vertice. Quindi:

$$\begin{cases} y = 2x + k \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + k \\ 25x^2 + (20k + 4)x + 4k^2 + 2k = 0 \end{cases}$$

Vogliamo che la retta sia tangente, per cui deve essere:

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Leftrightarrow -10k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}.$$

Quindi, il vertice della parabola é data dal sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + \frac{2}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{25} \\ y = -\frac{2}{25} \end{cases}$$

e, dunque, $V \equiv (-\frac{6}{25}, -\frac{2}{25})$. L'asse di simmetria é la retta che congiunge V con il punto improprio della parabola, $(2, -1, 0)$, per cui ha equazione $5x + 10y + 2 = 0$.

3) Usiamo la matrice associata alla quadrica

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & h & 0 \\ h & 1 & h & 0 \\ h & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |B| = -|A| = -2h^2(h-1)$$

Per $h = 0$ si ha un cilindro ellittico di vertice Z_∞, per $h = 1$ si ha un cilindro iperbolico di vertice $(1, -1, 0, 0)$. Le altre quadriche sono non degeneri. Il polinomio caratteristico della sottomatrice A è: $-T^3+2T^2+(3h^2-1)T+2h^2(h-1)$ e si verifica facilmente che gli autovalori non sono mai concordi. Quindi le quadriche sono tutte iperboloidi, iperbolici per $h < 1$ ($|B| > 0$), ellittici per $h > 1$ ($|B| < 0$).