Ingegneria Civile e Ambientale, Compito di **Algebra Lineare e Geometria** del 19/7/12

I

Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,1)$, $v_4 = (0,1,1,1)$ ed il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \mathbb{R}^4$ da essi generato.
1) Determinare l'equazione cartesiana di V e verificare che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V.
2) Dato l'endomorfismo $f : V \to V$ definito da:

$$\begin{cases} f(v_1) &= v_2 \\ f(v_2) &= v_1 \\ f(v_3) &= -v_1 + hv_4 \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
3) Verificare che f è semplice e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.
4) Determinare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(1,0,1,-1) = \{v \in V \mid f(v) = (1,0,1,-1)\}$$

5) Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare euclideo. Determinare una base ortogonale di V e completarla ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{s} : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

verificare che esse sono complanari e determinare il punto $P = \mathbf{r} \cap \mathbf{s}$, il piano π che le contiene e l'angolo $\widehat{\mathbf{rs}}$. Trovare il cono C luogo delle rette $\mathbf{t}$ che passano per P e tali che $\widehat{\mathbf{rt}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{rs}}$. Studiare la conica sezione di C col piano $z - 1 = 0$.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio ϕ di coniche che ha punti base $A \equiv (1,0)$, $B \equiv (3,0)$, $C \equiv (0,3)$, $D \equiv (4,3)$. Studiare la parabola $\mathbf{p}$ di ϕ determinandone asse, vertice, fuoco, direttrice.
3) Determinare e studiare la famiglia delle quadriche che contengono la conica Γ e gli assi $\vec{x}$, $\vec{y}$:

$$\Gamma : \begin{cases} x - y = 0 \\ xy - z = 0 \end{cases} ; \qquad \vec{x} : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; \qquad \vec{y} : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE, I

1) Consideriamo la matrice che ha per righe i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 ed ilvettore generico di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & y-x & 0 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-x-t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $V = \{(x,y,z,t) \mid x - y + t = 0\}$, $v_4 \in \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, v_1, v_2, v_3 sono indipendenti, quindi una base; si verifica facilmente che $v_4 = v_2 + v_3$.
2) Dai dati forniti, usando questa uguaglianza si ha $f(v_3) = -v_1 + hv_2 + hv_3$, quindi

$$\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]\,; \quad M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad \text{che ha rango 3 per } h \neq 0.$$

Quindi per $h \neq 0$ f è un isomorfismo; per $h = 0$ si trovano facilmente $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(v_1, v_2)$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((v_2 + v_3)$.
3) Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} -T & 1 & -1 \\ 1 & -T & h \\ 0 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)(T^2-1) = 0 \qquad T = h, \pm 1$$

pertanto se $h \neq \pm 1$ f ha tre autovalori distinti, quindi è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi.
$T = h$, $V_h = \{(0, y, y)\} = \mathscr{L}(v_2 + v_3)$;
$T = 1$, $V_1 = \{(x, x, 0)\} = \mathscr{L}(v_1 + v_2)$;
$T = -1$, $V_{-1} = \{(x, -x, 0)\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2)$.
Siccome la base di autovettori trovata non dipende da h, f risulta semplice anche nei casi particolari $h = \pm 1$.
4) Osserviamo che $[(1, 0, 1, -1)]_{\mathscr{A}} = (1, 1, -1)$, quindi risolviamo il sistema associato alla matrice completa $(A, B) =$

$$= \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & h & | & 1 \\ 0 & 0 & h & | & -1 \end{array}\right) \begin{array}{lll} h \neq 0 & \rho(A) = \rho(A,B) = 3 & f^{-1}(1,1,-1) = \{(2, 1-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h})\} \\ & & \qquad = \{2v_1 + (1-\frac{1}{h})v_2 - \frac{1}{h}v_3\} \\ h = 0 & \rho(A) = 2, \rho(A,B) = 3 & f^{-1}(1,0,1,-1) = \varnothing \end{array}$$

5) Siccome usiamo il prodotto scalare euclideo, tutti i vettori debbono essere visti come vettori di $\mathbb{R}^4$, con le loro componenti rispetto alla base canonica. Osserviamo che $v_1 \perp v_2$; imponendo che il generico vettore di V sia ortogonale ad entrambi troveremo il terzo vettore della base ortogonale $\mathscr{A}'$ di V:

$$\begin{array}{ll} (x, x+t, z, t) \cdot v_1 = 0 & 2x + t = 0 \\ (x, x+t, z, t) \cdot v_2 = 0 & z = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad v_3' = (1, -1, 0, -2)\,; \quad \mathscr{A}' = [v_1, v_2, v_3'].$$

Infine, imponendo che il generico vettore di $\mathbb{R}^4$ sia ortogonale a v_1, v_2, v_3 si ottiene il quarto vettore $v_4' = (1, -1, 0, 1)$ che completa la base ortogonale di V ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

II

1) Si trova facilmente il punto $P \equiv (1, 1, 1)$; nel fascio φ_s cerchiamo il piano passante per un punto di $\mathbf{r}$, per esempio O:

$$\varphi_s : x + y - 2 + h(z-1) = 0; \quad O \Rightarrow h = -2 \quad \Rightarrow \quad \pi : x + y - 2z = 0.$$

Infine poiché $R_\infty \equiv (1, 1, 1, 0)$ e $S_\infty \equiv (1, -1, 0, 0)$, si ha $\cos \widehat{\mathbf{rs}} = 0$ cioè $\widehat{\mathbf{rs}} = \frac{\pi}{2}$.
Cerchiamo le rette $\mathbf{t}$ per P che formano con $\mathbf{r}$ un angolo di $\frac{\pi}{4}$:

$$\mathbf{t} : \begin{cases} x - 1 = m(z-1) \\ y - 1 = n(z-1) \end{cases} \qquad T_\infty \equiv (m, n, 1, 0) \quad \cos \widehat{\mathbf{rt}} = \frac{m+n+1}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+n^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e si ottiene la relazione

$$m^2 - 4mn + n^2 - 4m - 4n + 1 = 0$$

da cui, eliminando i parametri m ed n,

$$C : \ (x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2 - 4(x-1)(z-1) - 4(y-1)(z-1) + (z-1)^2 = 0.$$

Siccome il piano $z-1=0$ passa per il vertice P del cono C, la conica sezione è spezzata. Avremo:

$$\begin{cases} z-1=0 \\ (x-1)^2-4(x-1)(y-1)+(y-1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ x-1=2(y-1)\pm\sqrt{3}(y-1) \end{cases}$$

cioè questa conica è spezzata in due rette reali e distinte
2) Nel fascio ci sono tre coniche spezzate distinte

$$AB\cup CD: y(y-3)=0;\ AC\cup BD: (3x+y-3)(3x-y-9)=0;\ AD\cup BC:\ (x-y-1)(x+y-3)=0$$

e per scrivere l'equazione del fascio usiamo la prima e la terza:

$$\phi: (x-y-1)(x+y-3)+hy(y-3)=0\,; \quad \phi: x^2+(h-1)y^2-4x+(2-3h)y+3=0$$

Le coniche spezzate del fascio ci sono note e si ottengono per $h=0$, $h=\infty$ e per $h=\frac{8}{9}$. Quest'ultimo valore si trova imponendo il passaggio per un punto della seconda conica spezzata. Per caratterizzare le coniche irriducibili usiamo $|A|=h-1$.

- $|A|>0 \quad h>1$ ELLISSI. Per $h=2$ si ha la circonferenza $x^2+y^2-4x-4y+3=0$;
- $|A|<0 \quad h<1$ IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;
- $|A|=0 \quad h=1$ PARABOLA $\mathbf{p}: y=x^2-4x+3$.

La parabola $\mathbf{p}$ ha asse parallelo all'asse $\vec{y}$, ha vertice $V\equiv(2,-1)$, asse $x-2=0$, fuoco $F\equiv(2,-\frac{3}{4})$ e direttrice $d: y+\frac{5}{4}=0$.
3) Imponendo alla generica quadrica contenente Γ di contenere gli assi, si ha:

$$(x-y)(ax+by+cz+d)+xy-z=0 \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ ax^2+dx\equiv 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ by^2+dy\equiv 0 \end{cases} \quad a=b=d=0$$

quindi le quadriche richieste hanno equazione: $xy+cxz-cyz-z=0$. Si calcolano facilmente $|B|=\frac{1}{16}>0$, $|A|=-\frac{c^2}{4}$; le quadriche sono tutte non degeneri a punti iperbolici. Per $c=0$ si ha il paraboloide iperbolico $xy-z=0$, per $c\neq 0$ si hanno iperboloidi iperbolici.