CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCAR-Z)- Ingegneria Industriale (SALE-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Settembre 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i sottospazi $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 3x - y - z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = x + y - z = 0\}$ e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,-1,1) &= (-2,2,2) \\ f(0,2,1) &= (2,-2,0) \\ f(1,1,-1) &= (0,0,-4). \end{aligned}$$

1) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Verificare che V e W hanno la stessa controimmagine rispetto a f, cioè che $f^{-1}(V) = f^{-1}(W)$.

2) Studiare l'endomorfismo f, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

3) Verificare che f è semplice e determinare una base $\mathscr{A}$ di autovettori.

4) Determinare il prodotto scalare rispetto al quale $\mathscr{A}$ risulti una base ortonormale.

Soluzione

1) Da:

$$\begin{aligned} f(1,-1,1) &= (-2,2,2) \\ f(0,2,1) &= (2,-2,0) \\ f(1,1,-1) &= (0,0,-4) \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) = (-2,2,2) \\ 2f(e_2) + f(e_3) = (2,-2,0) \\ f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = (0,0,-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (-1,1,-1) \\ f(e_2) = (1,-1,-1) \\ f(e_3) = (0,0,2), \end{cases}$$

per cui:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda $f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(W)$, da:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \\ -x-y+2z \end{pmatrix},$$

otteniamo che $f(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x-y+2z)$, per cui:

$$\begin{aligned} &f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) \in V\} = \\ &\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (-x+y) - (-x-y+2z) = 0,\ 3(-x+y) - (x-y) - (-x-y+2z) = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)) \end{aligned}$$

e

$f^{-1}(W) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) \in W\} =$
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-y)+(-x-y+2z) = 0,\ (-x+y)+(x-y)-2(-x-y+2z) = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1))$.

È, dunque, evidente che $f^{-1}(V) = f^{-1}(W)$.

2) Riduciamo la matrice associata:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,-1,-1),(0,0,2))$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3-2 = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y = 0,\ -2x+2z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 0 \\ 1 & -1-T & 0 \\ -1 & -1 & 2-T \end{vmatrix} = T(2-T)(2+T).$$

Quindi, gli autovalori sono $0, 2, -2$ e sono tutti di molteplicità algebrica 1, per cui f è semplice. Inoltre, $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((1,1,1))$. Per V_{-2} abbiamo:

$$M(f)+2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$V_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0, 4z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Per V_2 abbiamo:

$$M(f)-2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x+y = 0,\ -8x = 0\} = \mathscr{L}((0,0,1)).$$

Quindi, la base di autovettori cercata è $\mathscr{A} = [(1,1,1),(1,-1,0),(0,0,1)]$.

4) Cerchiamo $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}}$:

$$(x,y,z) = a(1,1,1)+b(1,-1,0)+c(0,0,1) = (a+b, a-b, a+c),$$

per cui:

$$\begin{cases} a+b = x \\ a-b = y \\ a+c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x+y}{2} \\ b = \dfrac{x-y}{2} \\ c = \dfrac{-x-y+2z}{2} \end{cases}$$

e $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, \frac{-x-y+2z}{2})$. In particolare:

$$[e_1]_{\mathscr{A}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$
$$[e_2]_{\mathscr{A}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$
$$[e_3]_{\mathscr{A}} = (0,0,1).$$

Questo significa che, rispetto al prodotto scalare per il quale $\mathscr{A}$ è una base ortonormale, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&e_1 \cdot e_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
&e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\
&e_1 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = -\frac{1}{2} \\
&e_2 \cdot e_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
&e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_2 = -\frac{1}{2} \\
&e_3 \cdot e_3 = 1.
\end{aligned}
$$

Quindi, il prodotto scalare cercato è dato da:

$$
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \frac{3}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}x_1y_2 + \frac{1}{4}x_2y_1 + \frac{3}{4}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1z_2 - \frac{1}{2}x_2z_1 - \frac{1}{2}y_1z_2 - \frac{1}{2}y_2z_1 + z_1z_2.
$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare le equazioni della retta p passante per $A = (1,0,0)$, parallela al piano $\alpha\colon x - 4y + 3z = 0$ e complanare con la retta:
$$r\colon \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$$
2) Determinare l'equazione della conica contenuta nel piano $z = 0$, passante per O e avente per asintoti le rette $4x - 2y - 3 = z = 0$ e $4x + 2y + 1 = z = 0$. Trovare centro di simmetria, assi di simmetria ed equazione canonica della conica trovata.
3) Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica $z = 4x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$, la retta $x = y = z$ e il punto $P = (0,0,1)$.

Soluzione

1) La retta p è l'intersezione tra il piano π_1 parallelo ad α e passante per A e il piano π_2 contenente r il punto A.

   Il piano π_1 è del tipo $x - 4y + 3z + k = 0$ e, dovendo passare per $A = (1,0,0)$, deve essere $k = -1$, per cui π_1 ha equazione $x - 4y + 3z - 1 = 0$.

   I piani contenenti r hanno equazione del tipo:
$$\lambda(x - z + 1) + \mu(y - 2z - 2) = 0.$$
   Imponendo il passaggio per A troviamo $2\lambda - 2\mu = 0$, per cui, prendendo $\lambda = \mu = 1$, abbiamo che il piano π_2 ha equazione $x + y - 3z - 1 = 0$. In conclusione la retta p ha equazioni:
$$\begin{cases} x - 4y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

2) Dal momento che un asintoto è tangente a una conica nel suo punto improprio, il fascio di coniche avente per asintoti le due rette $4x - 2y - 3 = z = 0$ e $4x + 2y + 1 = z = 0$ ha equazione:

$$(4x - 2y - 3)(4x + 2y + 1) + h = 0.$$

Imponendo il passaggio per l'origine O, troviamo che deve essere $h = 3$, per cui la conica cercata ha equazione:

$$(4x - 2y - 3)(4x + 2y + 1) + 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il centro di simmetria si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x - 1 = 0 \\ -y - 1 = 0, \end{cases}$$

per cui il centro di simmetria è il punto $C = (\frac{1}{4}, -1)$. Dato che $a_{12} = 0$, gli assi di simmetria sono le rette parallele agli assi cartesiani e passanti per C, cioè sono le rette di equazione $x = \frac{1}{4}$ e $y = -1$. Per la forma canonica, notiamo subito che gli autovalori di A sono 4 e -1 e inoltre:

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = -\frac{3}{4},$$

per cui una forma canonica della conica è $4X^2 - Y^2 = -\frac{3}{4}$.

3) Le quadriche contenenti la concia assegnata hanno equazione:

$$4x^2 - y^2 - 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersechiamo questa quadrica con la retta $x = y = z$:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ y = x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + b + c + 3)x^2 + dx = 0 \\ y = x \\ z = x. \end{cases}$$

La retta è contenuta nella quadrica se $a + b + c + 3 = 0$ e $d = 0$. Imponiamo il passaggio per $P = (0, 0, 1)$ alla quadrica $4x^2 - y^2 - 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0$, ottenendo $c + d = 0$. Quindi, deve essere:

$$\begin{cases} a + b + c + 3 = 0 \\ d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -a - 3 \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Dunque, le quadriche cercata hanno equazione:

$$4x^2 - y^2 + axz + (-a - 3)yz - 2x + 2y = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{a}{2} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{-a-3}{2} & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{-a-3}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & \frac{-a-3}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{-a-3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$|B| = \frac{9}{4} > 0 \quad \text{e} \quad |A| = -\frac{-3a^2 - 24a - 36}{4}.$$

Dato che $|A| = 0$ per $a = -2$ e $a = -6$, per questi due valori abbiamo due paraboloidi iperbolici. Per $a \neq -2, -6$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici (non possono essere ellissoidi immaginari, in quanto le quadriche contengono punti reali per costruzione).