Ingegneria Civile e Ambientale, Compito di **Algebra Lineare e Geometria** del 10/9/12

I

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ è assegnato il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.
1) Verificare che l'endomorfismo $f : V \to V$ definito dalle assegnazioni

$$\begin{cases} f(v_1) = v_2 + v_3 \\ f(v_2) = v_1 + v_3 \\ f(v_3) = v_1 + v_2 \end{cases}$$

è semplice e trovare una base ortogonale di autovettori.
2) Studiare, al variare del parametro reale h, l'endomorfimo $\varphi = f + hi : V \to V$, dove $i : V \to V$ è l'endomorfismo identità su V. Determinare, al variare di h, $\operatorname{Im}\varphi$ e $\operatorname{Ker}\varphi$.
3) Calcolare, al variare di h, la controimmagine del vettore $w = (2, 0, 1, 1)$

$$\varphi^{-1}(w) = \{v \in V \mid \varphi(v) = w\}$$

4) Verificare che φ è semplice e trovare una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Determinare la sfera S passante per i punti O, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$. Tra i piani paralleli al piano $z = 0$ trovare quelli che secano S in una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$.
2) Studiare il fascio ϕ di coniche di equazione

$$\phi :\ x^2 + (h-1)y^2 - 4x + (h+2)y + 3 = 0$$

determinandone in particolare i punti base e le coniche spezzate. Determinare vertice, asse e fuoco della parabola $\mathbf{p}$ di ϕ.
3) Determinare e studiare le quadriche Q che contengono la conica Γ, la retta $\mathbf{r}$ ed il punto P:

$$\Gamma : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{r} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}, \quad P \equiv (1, 0, 1)$$

SOLUZIONE, I

1) Possiamo usare in V la base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ ed osserviamo che $\mathcal{A}$ è una base ortogonale di V. Le componenti delle immagini di questi vettori sono già note, quindi avremo

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 1 \\ 1 & -T & 1 \\ 1 & 1 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + 3T + 2 = 0 \qquad \begin{array}{ll} T = -1 & m = 2 \\ T = 2 & \end{array}$$

Per $T = -1$ si ha subito $V_{-1} = \mathscr{L}(u_1 = (1, 0, -1)_{\mathcal{A}}, u_2 = (0, 1, -1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2 - v_3)$. Osserviamo che questi due vettori non sono ortogonali; siccome ci serve una base ortogonale di V_{-1}, sostituiamo ad u_2 un altro vettore u_2' ortogonale ad u_1. Ad esempio possiamo scegliere $u_2' = v_1 - 2v_2 + v_3$. Abbiamo quindi in V_{-1} la base ortogonale data da $u_1 = (0, 2, 0, 0), u_2' = (2, 0, -2, -2)$.
Per $T = 2$ si trova facilmente $V_2 = \mathscr{L}(u_3 = (1, 1, 1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) = \mathscr{L}(2, 0, 1, 1)$. In

definitiva abbiamo trovato la base ortogonale $[u_1, u_2', u_3]$.
2) Usiamo ancora la base $\mathcal{A}$; siccome la matrice associata all'identità è I, si ha

$$M^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \Rightarrow |M^{\mathcal{A}}(\varphi)| = h^3 - 3h + 2 = 0 \quad \begin{array}{l} h = 1 \\ h = -2 \end{array}$$

Se $h \neq -2$, 1 φ è un isomorfismo. Studiamo i casi particolari.

$$h = 1 : \begin{array}{l} \operatorname{Im}\varphi = \mathscr{L}((1,1,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) \\ \operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{L}((1,0,-1)_{\mathcal{A}}, (0,1,-1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2 - v_3) \end{array}$$

$$h = -2 : \begin{array}{l} \operatorname{Im}\varphi = \mathscr{L}((1,-1,0)_{\mathcal{A}}, (0,1,-1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_2, v_2 - v_3) \\ \operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{L}((1,1,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) \end{array}$$

3) Osserviamo che $w = v_1 + v_2 + v_3$, quindi consideriamo la matrice completa

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1-h^2 & 0 & 1-h & 1-h \\ 1-h & 0 & h-1 & 0 \end{array}\right)^{h\neq 1} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1-h^2 & 0 & 1-h & 1-h \\ (1-h)(h+2) & 0 & 0 & 1-h \end{array}\right)$$

Se $h \neq 1, -2$ si ha $\rho(A) = \rho(A, B) = 3$, quindi il sistema ammette una sola soluzione, in particolare:

$$\varphi^{-1}(w) = \{(\frac{1}{h+2}, \frac{1}{h+2}, \frac{1}{h+2})_{\mathcal{A}}\} = \{(\frac{2}{h+2}, 0, \frac{1}{h+2}, \frac{1}{h+2})\}$$

Se $h = 1$ si ha $\rho(A) = \rho(A, B) = 1$, quindi il sistema ammette ∞^2 soluzioni, in particolare:

$$\varphi^{-1}(w) = \{(x, y, 1 - x - y)_{\mathcal{A}} \in V\} = \left\{(1 - y, 2x + y - 1, y, y) \in \mathbb{R}^4\right\}$$

Se $h = -2$ si ha $\rho(A) = 2$, $\rho(A, B) = 3$, quindi il sistema è impossibile, $\varphi^{-1}(w) = \varnothing$.
4) Possiamo usare i risultati trovati al punto 1), ed avremo

$$\begin{array}{llll} h - T = 1 & m = 2 & \Rightarrow & T = h - 1 \quad m = 2 \\ h - T = -2 & & \Rightarrow & T = h + 2 \end{array}$$

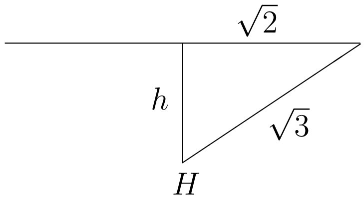
inoltre ritroviamo gli stessi autospazi

$$\begin{array}{l} V'_{h-1} = \mathscr{L}(u_1 = (1,0,-1)_{\mathcal{A}}, u_2 = (0,1,-1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_3, v_2 - v_3), \\ V'_{h+2} = \mathscr{L}(u_3 = (1,1,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3) \end{array}$$

II

1) Imponendo alla generica sfera $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ il passaggio per i punti dati si ha

$$\begin{cases} d = 0 \\ 2a + d + 4 = 0 \\ 2b + d + 4 = 0 \\ 2c + d + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0.$$



S ha centro $H \equiv (1,1,1)$ e raggio $\sqrt{3}$; per il teorema di Pitagora, affinché la circonferenza sezione abbia raggio $\sqrt{2}$ il piano secante deve avere distanza $h = 1$ dal centro (vedi figura). I piani paralleli al piano $z = 0$ che hanno distanza 1 da H hanno equazioni $z = 0$, $z - 2 = 0$.
2) Dalla matrice associata alla generica conica del fascio si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & h-1 & \frac{h+2}{2} \\ -2 & \frac{h+2}{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = -\frac{h(h+8)}{4} \\ \\ |A| = h-1 \end{array}$$

quindi le coniche spezzate sono:

$$\begin{aligned} h = 0: &\quad (x-y-1)(x+y-3) = 0 \\ h = -8: &\quad (x-3y-3)(x+3y-1) = 0 \\ h = \infty: &\quad y(y+1) = 0. \end{aligned}$$

Secando due di queste coniche (ad esempio la prima e la terza) si trovano i punti base del fascio: $(1,0)$, $(3,0)$, $(0,-1)$, $(4,-1)$.
Per studiare la coniche irriducibili del fascio usiamo $|A|$:

- $|A| > 0 \quad h > 1$ ELLISSI. Per $h = 2$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$;
- $|A| < 0 \quad h < 1$ IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;
- $|A| = 0 \quad h = 1$ PARABOLA $\mathbf{p}: \ y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

La parabola $\mathbf{p}$ ha asse parallelo all'asse $\vec{y}$, quindi le informazioni richieste si trovano facilmente: vertice $V \equiv (2, \frac{1}{3})$, asse $x - 2 = 0$, fuoco $F \equiv (2, -\frac{5}{12})$.
3) Imponendo alla generica quadrica contenente Γ di contenere la retta ed il punto dati, si trova

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1 - b + c)y^2 - (a+d)y \equiv 0 \quad \begin{cases} b - c = 1 \\ a + d = 0 \\ P \to a + c + d = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = -a \\ c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q: x^2 + y^2 + axz + yz - az - 1 = 0.$$

Dalla matrice associata a Q si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{a}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = \frac{1}{4} > 0 \\ \\ |A| = -\frac{1}{4}(a^2 + 1) \neq 0 \end{array}$$

quindi le quadriche Q sono tutte iperboloidi iperbolici.