CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCAR-Z)- Ingegneria Industriale (SALE-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 10 Luglio 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

Ia

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ -1 & 0 & h-1 \\ h & h-2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f, determinando $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2) Calcolare $f^{-1}(1,0,0,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3) Data $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $g(x,y,z,t) = (z, -x-t, y-t)$ per $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, determinare $\varphi = g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e studiare la semplicità di φ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4) **(Quesito per studenti dell'ordinamento 509 ossia iscritti prima dell'A.A.2010/2011)** Posto $V = \operatorname{Im} f$ nel caso $h = 0$ e $W = \operatorname{Im} f$ nel caso $h = -1$, calcolare $V + W$ e $V \cap W$.

*S*oluzione

1) Cominciamo lo studio di f riducendo la matrice associata:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ -1 & 0 & h-1 \\ h & h-2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ -h & h(1-h) & 0 \\ 0 & -h^2+2h-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

osservando che l'equazione $-h^2+2h-2 = 0$ non ha soluzioni reali. Questo significa che per $h \neq 0$ si ha $\rho(M(f)) = 3$, cioè $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,-1,h,-1),(h,0,h-2,1),(1,h-1,0,-1)]$. Inoltre:

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 0,$$

cioè $\ker f = \{(0,0,0)\}$. Sia ora $h = 0$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e, dato che elementi speciali della matrice ridotta si trovano nella prima e nella seconda colonna, concludiamo che $[(1,-1,0,-1),(0,0,-2,1)]$ è una base di $\operatorname{Im} f$. Inoltre:

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$$

e

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z = 0, -2z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

2) Per calcolare $f^{-1}(1,0,0,0)$ occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ -1 & 0 & h-1 & 0 \\ h & h-2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Dato che $\det(A|B) = 3h - 2h^2$, allora per $h \neq 0, \frac{3}{2}$ si ha $\rho(A|B) = 4$, mentre $\rho(A) = \rho(M(f)) \leq 3$. Quindi, il sistema è impossibile e concludiamo che per $h \neq 0, \frac{3}{2}$ si ha $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In tal caso $\rho(A|B) = 3 \neq \rho(A) = 2$. Quindi, anche per $h = 0$ il sistema è impossibile, cioè anche per $h = 0$ $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$.

Sia $h = \frac{3}{2}$. In tal caso:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In questo caso $\rho(A|B) = \rho(A) = 3$, il che vuol dire che il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + z = 1 \\ -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y = -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4}y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{15} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = \frac{4}{15}. \end{cases}$$

Quindi, per $h = \frac{3}{2}$:

$$f^{-1}(1,0,0,0) = \{(\tfrac{2}{15}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{15})\}.$$

3) La matrice associata a g rispetto alle basi canoniche è:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$M(\varphi) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & h & 1 \\ -1 & 0 & h-1 \\ h & h-2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & h-2 & 0 \\ 0 & -h-1 & 0 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & h-2 & 0 \\ 0 & -h-1-T & 0 \\ 0 & -1 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)^2(-h-1-T).$$

Dato che $h = -h-1$ per $h = -\frac{1}{2}$, concludiamo che per $h \neq -\frac{1}{2}$ si ha $m_h = 2$ e $m_{-h-1} = 1$, mentre per $h = -\frac{1}{2}$ si ha $m_{-\frac{1}{2}} = 3$.

Sia $h \neq -\frac{1}{2}$. φ è semplice se $\dim V_h = 2$. Dato che:

$$M(\varphi) - hI = \begin{pmatrix} 0 & h-2 & 0 \\ 0 & -2h-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\rho(M(\varphi)-hI)=1$ e, quindi, $\dim V_h = 3-1=2=m_h$. Quindi, per $h\neq -\frac{1}{2}$ φ è semplice.

Sia $h=-\frac{1}{2}$. φ è semplice se $\dim V_{-\frac{1}{2}}=3$. Dato che:

$$M(\varphi)+\tfrac{1}{2}I=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\rho(M(\varphi)+\frac{1}{2}I)=1$, per cui $\dim V_{-\frac{1}{2}}=3-1=2<m_{-\frac{1}{2}}=3$. Dunque, per $h=-\frac{1}{2}$ φ non è semplice.

4) Per quanto visto nello studio della f:

$$V=\mathscr{L}((1,-1,0,-1),(0,0,-2,1))$$

e

$$W=\mathscr{L}((1,-1,-1,-1),(-1,0,-3,1),(1,-2,0,-1)).$$

Cerchiamo le equazioni cartesiane di V:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & x+y & 2x+z+2t & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ 2x+z+2t=0\}.$$

Cerchiamo l'equazione cartesiana di W:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = -5x-5t,$$

per cui:

$$W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+t=0\}.$$

Sappiamo che:

$$V+W=\mathscr{L}((1,-1,0,-1),(0,0,-2,1),(1,-1,-1,-1),(-1,0,-3,1),(1,-2,0,-1)).$$

Osserviamo che $(0,0,-2,1)\notin W$, in quanto non verifica la sua equazione cartesiana, per cui $V+W\supsetneq W$, cioè $\dim(V+W)>\dim W=3$. Ma $V+W\subseteq\mathbb{R}^4$, da cui si deduce che $V+W=\mathbb{R}^4$.

Dalla formula di Grassmann vediamo che $\dim(V\cap W)=1$ e:

$$V\cap W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ 2x+z+2t=0,\ x+t=0\}=\mathscr{L}((1,-1,0,-1)).$$

Ib

Sia $\psi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la forma bilineare associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Provare che ψ definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

2) Posto $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$, calcolare il sottospazio $W^\perp$ ortogonale rispetto a tale prodotto scalare.

Soluzione

1) Poiché ψ è simmetrica, per mostrare che è un prodotto scalare è sufficiente fare vedere che gli autovalori di A sono tutti positivi. Questo è vero poiché:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -1 & 0 \\ -1 & 2-T & -1 \\ 0 & -1 & 4-T \end{vmatrix} = -T^3 + 8T^2 - 18T + 10$$

e i coefficienti sono tutti a segno alterno, per cui gli autovalori sono, effettivamente, tutti positivi.

2) Dato che $W = \mathscr{L}((1,0,1),(0,1,-1))$, allora:

$$W^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\cdot(1,0,1) = 0,\ (x,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0\}.$$

Dato che il prodotto scalare è definito da ψ:

$$(x,y,z)\cdot(1,0,1) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x - 2y + 4z$$

$$(x,y,z)\cdot(0,1,-1) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -x + 3y - 5z.$$

Dunque:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y + 4z = 0,\ -x + 3y - 5z = 0\} = \mathscr{L}((-1,3,2)).$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare i piani paralleli a $r\colon x - z - 1 = y - z - 3 = 0$, perpendicolari a $\pi\colon x - 2y + z - 6 = 0$ e aventi distanza $\sqrt{2}$ dal punto $(0,1,-4)$.

2) Determinare sul piano $z = 0$ la parabola Γ_1 tangente alla retta $x - 2y + 2 = 0$ in $(0,1)$ e alla retta $x + 2y + 2 = 0$ in $(0,-1)$ e la parabola Γ_2 tangente alla retta $2x - y - 2 = 0$ in $(1,0)$ e alla retta $2x + y + 2 = 0$ in $(-1,0)$. Studiare il fascio di coniche determinato da Γ_1 e Γ_2.

3) Determinare e studiare la quadrica contenente la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} z = 0 \\ y^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

e le rette:

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1) È facile vedere che $(1,1,1)$ sono le componenti di un vettore parallelo a r e $(1,-2,1)$ sono quelle di un vettore ortogonale a π. Se (a,b,c) sono le componenti di un vettore ortogonale ai piani che stiamo cercando, allora:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a. \end{cases}$$

Quindi, i nostri piani hanno $(1,0,-1)$ come componenti di un vettore ad essi ortogonale. Quindi, essi hanno equazione del tipo $x - z + k = 0$. Imponiamo che la distanza del punto P da questi piani sia $\sqrt{2}$:

$$\frac{|4+k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow k = -2 \quad \text{e} \quad k = -6.$$

Quindi, i piani cercati hanno equazioni $x - z - 2 = 0$ e $x - z - 6 = 0$.

2) Γ_1 è la parabola del seguente fascio:

$$(x-2y+2)(x+2y+2)+hx^2=0 \Rightarrow (h+1)x^2-4y^2+4x+4=0.$$

Imponendo che $|A|=0$ troviamo che deve essere $h=-1$, per cui $\Gamma_1\colon y^2-x-1=0$.
Γ_2 è la parabola del seguente fascio:

$$(2x-y-2)(2x+y+2)+hy^2=0 \Rightarrow 4x^2+(h-1)y^2-4y-4=0.$$

Imponendo che $|A|=0$ troviamo che deve essere $h=1$, per cui $\Gamma_2\colon x^2-y-1=0$.
Il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$y^2-x-1+h(x^2-y-1)=0 \Rightarrow hx^2+y^2-x-hy-h-1=0.$$

Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} h & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{h}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{h}{2} & -h-1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$|B|=-\frac{h^3+4h^2+4h+1}{4}=0 \Leftrightarrow h=-1, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

e $|A|=h$. Dunque per $h=-1$, $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ abbiamo tre coniche spezzate. I punti base sono dati da:

$$\begin{cases} y^2-x-1=0 \\ x^2-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y^2-1 \\ y^4-2y^2-y=0 \end{cases}$$

I punti base sono, perciò, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ e $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.Inoltre:

- per $h>0$ abbiamo delle ellissi (reali perché i punti base sono reali) e per $h=1$ abbiamo una circonferenza;
- per $h=0$ abbiamo una parabola, che è Γ_1, oltre naturalmente a Γ_2, cioè Γ_1 e Γ_2 sono le uniche parabole del fascio;
- per $h<0$, con $h\neq -1$, $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, abbiamo delle iperboli; dato che $\mathrm{Tr}(A)=0$ solo per $h=-1$, non ci sono iperboli equilatere nel fascio.

3) Le quadriche contenenti la conica assegnata hanno equazione:

$$z(ax+by+cz+d)+y^2-x-1=0.$$

Imponiamo che contenga la retta $y-1=x-z=0$:

$$\begin{cases} y=1 \\ z=x \\ z(ax+by+cz+d)+y^2-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=x \\ x(ax+b+cx+d)-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=x \\ (a+c)x^2+(b+d-1)x=0. \end{cases}$$

La retta è contenuta nella quadrica se $a+c=0$ e $b+d-1=0$. Nello stesso modo:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z(ax+by+cz+d)+y^2-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ cz^2+(-a+d)z=0. \end{cases}$$

La retta è contenuta nella quadrica se $a=0$ e $-a+d=0$. Dunque, la quadrica cercata è tale che:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d-1=0 \\ c=0 \\ -a+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=0, \end{cases}$$

per cui ha equazione $y^2 + yz - x - 1 = 0$. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = \frac{1}{16} > 0$ e che $|A| = 0$, concludiamo che la quadrica è un paraboloide iperbolico.