CdL in Ingegneria REA - Ingegneria delle Telecomunicazioni - - Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z) - - Ingegneria Civile - Ingegneria Gestionale (A-L)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 9 Aprile 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & h & 2 & -1 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 \\ 1 & 0 & 1-h & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare φ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, nucleo e immagine di φ.
2) Dati $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0\}$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0\}$, determinare il valore del parametro h per il quale φ determina un endomorfismo $f\colon V \to V$. Verificare che per lo stesso valore di h la restrizione di φ a W determina un endomorfismo $g\colon W \to W$.
3) Determinare una base di autovettori di V e una di W rispetto agli endomorfismi f e g.
4) Calcolare $\varphi^{-1}(0,1,0,1)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) Dal momento che $|M(\varphi)| = h^2 + 3h$, vediamo che per $h \neq 0, -3$, $|M(\varphi) \neq 0$, il che vuol dire che $\dim \operatorname{Im} \varphi = \rho(M(\varphi)) = 4$, cioè $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^4$ e f è suriettiva, e inoltre:

$$\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} \varphi = 0,$$

cioè $\ker \varphi = \{(0,0,0,0)\}$ e φ è iniettiva. Dunque, φ è un isomorfismo.

Sia $h = 0$. Allora:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \rho(M(\varphi)) = 3$ e, trovandosi gli elementi speciali della matrice ridotta nelle prime tre colonne, vediamo che una base di $\operatorname{Im} \varphi$ è:

$$[(1,0,1,0), (0,1,0,1), (2,-1,1,-2)].$$

Per quel che riguarda il nucleo, sappiamo che $\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} \varphi = 1$ e:

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z - t = 0,\ y - z + 2t = 0,\ -z - t = 0\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -3z,\ y = 3z,\ t = -z\} = \{(-3z, 3z, z, -z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((3,-3,-1,1)). \end{aligned}$$

Sia $h = -3$. Allora:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \rho(M(\varphi)) = 3$ e, trovandosi gli elementi speciali della matrice ridotta nelle prime tre colonne, vediamo che una base di $\operatorname{Im} \varphi$ è:

$$[(1,0,1,0), (-3,1,0,1), (2,-4,4,-2)].$$

Per quel che riguarda il nucleo, sappiamo che $\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} \varphi = 1$ e:

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y + 2z - t = 0,\ y - 4z + 2t = 0,\ 14z - 7t = 0\} = \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0,\ y = 0,\ t = 2z\} = \{(0,0,z,2z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((0,0,1,2)). \end{aligned}$$

2) Sappiamo che:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y,\ z = t\} = \{(x,x,z,z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,0,0),(0,0,1,1)).$$

Per vedere quando $\varphi|_V$ induce un endomorfismo di V dobbiamo vedere quando $\varphi(V) \subseteq V$. Essendo:

$$\varphi(V) = \mathscr{L}(\varphi(1,1,0,0), \varphi(0,0,1,1)),$$

calcoliamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 2 & -1 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 \\ 1 & 0 & 1-h & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & h & 2 & -1 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 \\ 1 & 0 & 1-h & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ h+1 \\ -1-h \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\varphi(1,1,0,0) = (h+1,1,1,1)$ e $\varphi(0,0,1,1) = (1,h+1,-1-h,-1)$ e:

$$\varphi(V) = \mathscr{L}((h+1,1,1,1),(1,h+1,-1-h,-1)).$$

$\varphi(V) \subseteq V$ se e solo se $(h+1,1,1,1),(1,h+1,-1-h,-1) \in V$, cioè se e solo se $(h+1,1,1,1),(1,h+1,-1-h,-1)$ verificano le equazioni cartesiane di V:

$$(h+1,1,1,1) \in V \Leftrightarrow h+1-1 = 0,\ 1-1 = 0$$

e

$$(1,h+1,-1-h,-1) \in V \Leftrightarrow 1-h-1 = 0,\ -1-h+1 = 0.$$

Questo accade solo per $h = 0$ e, quindi, per $h = 0$ $\varphi|_V$ induce un endomorfismo $f\colon V \to V$.

Dato che:

$$W = \{(x,-x,z,-z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)),$$

allora

$$\varphi(W) = \mathscr{L}(\varphi(1,-1,0,0), \varphi(0,0,1,-1)).$$

Come prima, dobbiamo vedere che $\varphi(W) \subseteq W$ per $h = 0$, cioè che $\varphi(1,-1,0,0), \varphi(0,0,1,-1) \in W$ per $h = 0$. Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\varphi(1,-1,0,0) = (1,-1,1,-1)$ e che $\varphi(0,0,1,-1) = (3,-3,3,-3)$. Dato che entrambi questi vettori verificano le equazioni cartesiane di W, allora $\varphi(W) \subseteq W$ e per $h = 0$ la restrizione $\varphi|_W$ induce un endomorfismo $g\colon W \to W$.

3) Sia $h = 0$. Abbiamo visto che $\mathscr{A} = [(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$ è una base di V e che $\varphi(1,1,0,0) = (1,1,1,1)$ e $\varphi(0,0,1,1) = (1,1,-1,-1)$. L'endomorfismo indotto $f\colon V \to V$ è tale che:

$$f(1,1,0,0) = \varphi(1,1,0,0) = (1,1,1,1) \qquad \text{e} \qquad f(0,0,1,1) = \varphi(0,0,1,1) = (1,1,-1,-1).$$

Inoltre, $(1,1,1,1) = (1,1,0,0) + (0,0,1,1)$, cioè $[f(1,1,0,0)]_{\mathscr{A}} = (1,1)$, e $(1,1,-1,-1) = (1,1,0,0) - (0,0,1,1)$, cioè $[f(0,0,1,1)]_{\mathscr{A}} = (1,-1)$. Quindi:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 \\ 1 & -1-T \end{vmatrix} = T^2 - 2.$$

Questo vuol dire che gli autovalori di f sono $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ e f è semplice. Calcoliamo l'autospazio $V_{\sqrt{2}}$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - \sqrt{2}I = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

cioè:

$$\begin{aligned} V_{\sqrt{2}} &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b),\ (1-\sqrt{2})a + b = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, (\sqrt{2}-1)a)\} = \\ &= \mathscr{L}((1,\sqrt{2}-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,1,0,0) + (\sqrt{2}-1)(0,0,1,1)) = \mathscr{L}((1,1,\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)). \end{aligned}$$

Calcoliamo l'autospazio $V_{-\sqrt{2}}$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) + \sqrt{2}I = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

cioè:

$$\begin{aligned} V_{-\sqrt{2}} &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b),\ (1+\sqrt{2})a + b = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, -(\sqrt{2}+1)a)\} = \\ &= \mathscr{L}((1,-\sqrt{2}-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,1,0,0) - (\sqrt{2}+1)(0,0,1,1)) = \mathscr{L}((1,1,-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1)). \end{aligned}$$

Quindi, una base di autovettori di f è $[(1,1,\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1),(1,1,-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1)]$.
Per quel che riguarda W, abbiamo visto che una sua base è $\mathscr{B} = [(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)]$, $\varphi(1,-1,0,0) = (1,-1,1,-1)$ e $\varphi(0,0,1,-1) = (3,-3,3,-3)$. Quindi, l'endomorfismo indotto $g\colon W \to W$ è tale che:

$$g(1,-1,0,0) = \varphi(1,-1,0,0) = (1,-1,1,-1) \qquad \text{e} \qquad g(0,0,1,1) = \varphi(0,0,1,-1) = (3,-3,3,-3).$$

Inoltre, $(1,-1,1,-1) = (1,-1,0,0) + (0,0,1,-1)$, cioè $[g(1,-1,0,0)]_{\mathscr{B}} = (1,1)$, e $(3,-3,3,-3) = 3(1,1,0,0) + 3(0,0,1,-1)$, cioè $[g(0,0,1,-1)]_{\mathscr{B}} = (3,3)$. Quindi:

$$M^{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 3 \\ 1 & 3-T \end{vmatrix} = T^2 - 4T.$$

Questo vuol dire che gli autovalori di g sono 0 e 4 e g è semplice. Calcoliamo l'autospazio V_0:

$$M^{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

cioè:

$$\begin{aligned} V_0 &= \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{B}} = (a,b),\ a + 3b = 0\} = \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{B}} = (-3b, b)\} = \\ &= \mathscr{L}((-3,1)_{\mathscr{B}}) = \mathscr{L}(-3(1,-1,0,0) + (0,0,1,-1)) = \mathscr{L}((-3,3,1,-1)). \end{aligned}$$

Calcoliamo l'autospazio V_4:

$$M^{\mathscr{B}}(g) - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

cioè:

$$\begin{aligned} V_4 = \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{B}} = (a,b),\ a-b=0\} = \{w \in W \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,a)\} = \\ = \mathscr{L}((1,1)_{\mathscr{B}}) = \mathscr{L}((1,-1,0,0)+(0,0,1,-1)) = \mathscr{L}((1,-1,1,-1)). \end{aligned}$$

Dunque, una base di autovettori di g è $[(-3,3,1,-1),(1,-1,1,-1)]$.

4) Dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1-h & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Riduciamo per righe la matrice:

$$\xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 & 1 \\ 0 & -h & -1-h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -h & -1-h & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \mapsto R_4 + hR_2]{R_3 \mapsto R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1-h & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h^2-2h-1 & 2h-1 & h \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \mapsto R_4 + (2h-1)R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & h & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & h-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1-h & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -h^2-3h & 0 & h \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 0, -3$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x + hy + 2z - t = 0 \\ y + (h-1)z + 2t = 1 \\ (-1-h)z - t = 0 \\ (-h^2-3h)z = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{h+3} \\ t = \dfrac{h+1}{h+3}. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 0, -3$:

$$f^{-1}(0,1,0,1) = \left\{ \left(1, 0, -\frac{1}{h+3}, \frac{h+1}{h+3}\right) \right\}.$$

Sia $h = 0$. Allora la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi, $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ e il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2z - t = 0 \\ y - z + 2t = 1 \\ -z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 3z + 1 \\ t = -z. \end{cases}$$

Dunque, per $h = 0$:

$$f^{-1}(0,1,0,1) = \{(-3z, 3z+1, z, -z) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Per $h = -3$ la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Dunque, $\rho(A) = 3$, mentre $\rho(A|B) = 4$, il che vuol dire che il sistema è impossibile, cioè per $h = -3$:

$$f^{-1}(0,1,0,1) = \emptyset.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x - hy + hz = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s\colon \begin{cases} x + hz - 1 = 0 \\ y - hz + 1 = 0, \end{cases}$$
determinare il valore del parametro reale h per cui esse sono parallele e per quel valore trovare il piano che contiene r e s.

2) Determinare e studiare il fascio ϕ di coniche tangenti alla retta $t\colon x - y = z = 0$ nel punto $A = (1,1,0)$ e alla retta $u\colon x - y - 1 = z = 0$ nel punto $B = (1,0,0)$. Verificare che non ci sono circonferenze nel fascio ϕ.

3) Data la conica:
$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$
determinare l'equazione del cilindro contenente Γ e avente vertice in $V = (1,1,1,0)$.

Soluzione

1) Cerchiamo i parametri direttori della retta r:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & h \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{vmatrix} -h & h \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & h \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -h \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-h, h, h+1).$$
Quindi, i parametri direttori di r sono $(-h, h, h+1)$. Inoltre, essendo:
$$s\colon \begin{cases} x = -hz + 1 \\ y = hz - 1, \end{cases}$$
vediamo che i parametri direttori di s sono $(-h, h, 1)$. Le due rette sono parallele se $(-h, h, h+1)$ e $(-h, h, 1)$ sono proporzionali, cioè se la matrice:
$$\begin{pmatrix} -h & h & 1 \\ -h & h & h+1 \end{pmatrix}$$
ha rango 1. Riducendo otteniamo:
$$\begin{pmatrix} -h & h & 1 \\ h^2 & -h^2 & 0 \end{pmatrix},$$
cioè i parametri direttori sono proporzionali per $h = 0$. In tal caso:
$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
e
$$s\colon \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

Per determinare il piano che contiene r e s cerchiamo il piano contenente r e un punto qualsiasi di s, per esempio $(1, -1, 0)$. Il generico piano contenente r è:

$$\lambda x + \mu y = 0.$$

Imponente il passaggio per $(1, -1, 0)$ abbiamo $\lambda - \mu = 0$, cioè possiamo prendere $\lambda = \mu = 1$ e il piano cercato è:

$$x + y = 0.$$

2) Osserviamo subito che la retta congiungente i punti A e B ha equazione $x - 1 = 0$. Quindi, le due e uniche coniche spezzate del fascio sono $(x - y)(x - y - 1) = 0$ e $(x - 1)^2 = 0$. Scriviamo l'equazione generica del fascio:

$$(x - y)(x - y - 1) + h(x - 1)^2 = 0.$$

Osserviamo che con questa scelta stiamo trascurando la concia spezzata $(x - 1)^2 = 0$. Scriviamo la matrice associata al fascio:

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & -1 & -\dfrac{2h+1}{2} \\ -1 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{2h+1}{2} & \dfrac{1}{2} & h \end{pmatrix}.$$

Non è necessario calcolare $|B|$, in quanto sappiamo già che le uniche coniche del fascio sono quella per $h = 0$ e quella nascosta. Calcoliamo:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = h.$$

Quindi, per $h < 0$ abbiamo iperboli e, essendo $\mathrm{Tr}(A) = h + 2$, vediamo che per $h = -2$ abbiamo un'iperbole equilatera. Non abbiamo parabole, perché $|A| = 0$ solo per $h = 0$, caso in cui troviamo una conica spezzata. Pe $h > 0$ abbiamo ellissi. Osserviamo che non ci sono circonferenze, in quanto $a_{12} \neq 0$ per ogni h.

3) Il generico punto $P \in \Gamma$ ha coordinate $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$. Scriviamo la retta PV:

$$\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = z \\ \alpha = x - z \\ \beta = y - z. \end{cases}$$

Al variare di $P \in \Gamma$, le rette PV sono sempre contenute nel cilindro di vertice il punto improprio V e contenente Γ. Quindi, sostituendo $\alpha = x - z$ e $\beta = y - z$ in $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$, troviamo l'equazione del cilindro che cercavamo:

$$(x - z)^2 - (x - z)(y - z) + (y - z)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1 = 0.$$