CdL in Ingegneria REA - Ingegneria Gestionale

Prova scritta di **Geometria**- 4 Ottobre 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h+1, h+1, h+1) \\ f(1,1,0) &= (h+2, h+2, 2) \\ f(1,0,0) &= (2,1,1) \end{aligned}$$

1) Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche e studiare f, determinando in ciascun caso $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Mostrare che per ogni valore di h la somma di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ è diretta e calcolare $\ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

3) Verificare che $T = 1$ è una autovalore per f e studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(1,0,0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,0,0)\}$.

Soluzione

1) Da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h+1, h+1, h+1) \\ f(1,1,0) &= (h+2, h+2, 2) \\ f(1,0,0) &= (2,1,1) \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (h+1, h+1, h+1) \\ f(e_1) + f(e_2) = (h+2, h+2, 2) \\ f(e_1) = (2,1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (2,1,1) \\ f(e_2) = (h, h+1, 1) \\ f(e_3) = (-1,-1,h-1). \end{cases}$$

Quindi:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & h & -1 \\ 1 & h+1 & -1 \\ 1 & 1 & h-1 \end{pmatrix}$$

e $|M(f)| = h(h+1)$. Questo vuol dire che per $h \neq 0, -1$ si ha $|M(f)| \neq 0$, così che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Dunque, f è suriettiva e $\dim \ker f =$, cioè $\ker f = \{(0,0,0)\}$ e f è iniettiva.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo significa che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e, dato che gli elementi speciali della matrice ridotta sono nella prima e nella terza colonna, la prima e la terza colonna di $M(f)$ individuano una base di $\mathrm{Im}\, f$, così che $\mathrm{Im}\, f = \mathscr{L}((2,1,1),(-1,-1,-1)) = \mathscr{L}((2,1,1),(1,1,1))$. Per quel che riguarda il nucleo, abbiamo che $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}\, f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0,\ -x + y = 0\} = \{(x,x,2x) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,1,2)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo significa che $\dim \mathrm{Im}\, f = \rho(M(f)) = 2$ e, dato che gli elementi speciali della matrice ridotta sono nella prima e nella terza colonna, la prima e la terza colonna di $M(f)$ individuano una base di $\mathrm{Im}\, f$, così che $\mathrm{Im}\, f = \mathscr{L}((2,1,1),(-1,0,-1))$. Per quel che riguarda il nucleo, abbiamo che $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}\, f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0,\ x - z = 0\} = \{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,1,1)).$$

2) Per $h \neq 0, -1$ $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$ e $\ker f = \{(0,0,0)\}$. Allora è chiaro che $\mathrm{Im}\, f + \ker f = \mathbb{R}^3$ e che la somma è diretta, essendo $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{(0,0,0)\}$. Dunque in questo caso è ovvio che $\mathrm{Im}\, f \oplus \ker f = \mathbb{R}^3$.

Sia $h = 0$. In tal caso, vediamo che $\mathrm{Im}\, f + \ker f = \mathscr{L}((2,1,1),(1,1,1),(1,1,2))$. Calcoliamo la dimensione di $\mathrm{Im}\, f + \ker f$ riducendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim(\mathrm{Im}\, f + \ker f) = 3$, cioè $\mathrm{Im}\, f + \ker f = \mathbb{R}^3$, e inoltre:

$$\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \ker f) = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f - \dim(\mathrm{Im}\, f + \ker f) = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Questo vuol dire che $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{(0,0,0)\}$, di modo che la somma è diretta è $\mathrm{Im}\, f \oplus \ker f = \mathrm{Im} + \ker f = \mathbb{R}^3$.

Nel caso $h = -1$ procediamo nello stesso modo. In tal caso $\mathrm{Im}\, f + \ker f = \mathscr{L}((2,1,1),(-1,0,1),(1,1,1))$. Calcoliamo la dimensione di $\mathrm{Im}\, f + \ker f$ riducendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim(\mathrm{Im}\, f + \ker f) = 3$, cioè $\mathrm{Im}\, f + \ker f = \mathbb{R}^3$, e inoltre:

$$\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \ker f) = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f - \dim(\mathrm{Im}\, f + \ker f) = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Questo vuol dire che $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{(0,0,0)\}$, di modo che la somma è diretta è $\mathrm{Im}\, f \oplus \ker f = \mathrm{Im} + \ker f = \mathbb{R}^3$.

3) Per mostrare che $T = 1$ è un autovalore dobbiamo mostrare che $|M(f) - I| = 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$:

$$M(f) - I = \begin{pmatrix} 2 & h & -1 \\ 1 & h+1 & -1 \\ 1 & 1 & h-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ 1 & h & -1 \\ 1 & 1 & h-2 \end{pmatrix}.$$

Dato che le prime due righe di $M(f)$ sono uguali, concludiamo subito che $|M(f) - I| = 0$ e, dunque, $T = 1$ è un autovalore per f.

Calcoliamo, ora, il polinomio caratteristico di f:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & h & -1 \\ 1 & h+1-T & -1 \\ 1 & 1 & h-1-T \end{vmatrix} = -T^3 + (2h+2)T^2 + (-h^2-3h-1)T + h^2 + h.$$

Applicando la regola di Ruffini per scomporre il polinomio, dato che $T = 1$ è una soluzione, otteniamo:

$$P(T) = (1-T)[T^2 - (2h+1)T + h^2 + h].$$

Da qui otteniamo che gli autovalori sono $T = 1, h, h+1$. Questi autovalori sono a due a due distinti per $h \neq 0, 1$. Quindi, per $h \neq 0, 1$ f è semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 1 con $m_1 = 2$ e 0 con $m_0 = 1$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$ e se $\dim V_0 = m_0 = 1$. Dato che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$ e che $1 \leq \dim V_0 \leq m_0 = 1$, vediamo che f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Per calcolare $\dim V_1$ dobbiamo calcolare il rango della seguente matrice:

$$M(f) - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha un minore di ordine 2 non nullo, per esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

concludiamo che $\rho(M(f) - I) = 2$ e che $\dim V_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \rho(M(f) - I) = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$. Quindi, per $h = 0$ f non è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 con $m_1 = 2$ e 2 con $m_2 = 1$. f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$ e se $\dim V_2 = m_2 = 1$. Dato che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$ e che $1 \leq \dim V_2 \leq m_2 = 1$, vediamo che f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Per calcolare $\dim V_1$ dobbiamo calcolare il rango della seguente matrice:

$$M(f) - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha tre righe uguali, concludiamo che $\rho(M(f) - I) = 1$ e che $\dim V_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \rho(M(f) - I) = 3 - 1 = 2 = m_1$. Quindi, per $h = 1$ f è semplice.

4) Per calcolare $f^{-1}(1, 0, 0)$, dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\begin{pmatrix} 2 & h & -1 & |1 \\ 1 & h+1 & -1 & |0 \\ 1 & 1 & h-1 & |0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & h & -1 & | \ 1 \\ -1 & 1 & 0 & | -1 \\ 0 & h^2+h & 0 & | -h \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 0, -1$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, cosicché il sistema ammette 1 sola soluzione:

$$\begin{cases} 2x + hy - z = 1 \\ -x + y = -1 \\ (h^2+h)y = -h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{h}{h+1} \\ y = -\dfrac{1}{h+1} \\ z = -\dfrac{1}{h+1}, \end{cases}$$

cioè per $h \neq 0, -1$:

$$f^{-1}(1, 0, 0) = \left\{ \left(\frac{h}{h+1}, -\frac{1}{h+1}, -\frac{1}{h+1} \right) \right\}.$$

Per $h = 0$ il sistema ridotto diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

da cui vediamo che il sistema ammette ∞^1 soluzioni e quindi per $h = 0$:

$$f^{-1}(1,0,0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 1,\ -x + y = -1\} = \{(x, x-1, 2x-1) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Per $h = -1$ il sistema ridotto diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

da cui vediamo che il sistema non ammette soluzioni, essendo $\rho(A) = 2$ e $\rho(A|B) = 3$. Quindi, per $h = -1$ $f^{-1}(1,0,0) = \emptyset$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta $r\colon x - y = z - 1 = 0$, il piano $\pi\colon y - z = 0$ e il punto $P = (1,2,0)$, determinare la retta s ortogonale a π e passante per P. Mostrare che r e s sono complanari e determinare il piano che le contiene.

2) Determinare la conica Γ tangente alla retta $x - 2y = 0$ nell'origine e alla retta $x + 2y + 8 = 0$ nel punto $(0, -4)$ e passante per il punto $(-\frac{1}{2}, 0)$. Mostrare che Γ è un'iperbole e determinare i suoi asintoti.

3) Studiare, al variare del parametro reale k, il fascio di quadriche di equazione:

$$x^2 + 2hxy - hz^2 + 2y - 2z = 0.$$

Soluzione

1) Un vettore ortogonale al piano π è quello di componenti $(0,1,-1)$. Quindi, $(0,1,-1)$ sono i parametri direttori della retta s che ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t. \end{cases}$$

I parametri direttori di r sono $(1,1,0)$. Quindi, dato che $(0,1,-1)$ e $(1,1,0)$ non sono proporzionali conlcudiamo che r e s non sono parallele. Le due rette sono complanari se sono incidenti:

$$r \cap s\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \\ x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ 1 = 2 + t \\ 1 = -t. \end{cases}$$

Quindi, $r \cap s = \{(1,1,1)\}$ e le due rette sono incidenti e complanari. Per determinare il piano che contiene entrambe possiamo trovarlo come il piano contenente r e passante per $P = (1,2,0)$. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x - y) + \mu(z - 1) = 0.$$

Imponiamo il passaggio per P:

$$\lambda(1 - 2) + \mu(-1) = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda.$$

Quindi, il piano contenente r e s è il piano $x - y - z + 1 = 0$.

2) Costruiamo il fascio di coniche individuato dalle due tangenti nell'origine e nel punto $(0,-4)$. La prima conica spezzata è $(x-2y)(x+2y+8)=0$ e la seconda è $x^2=0$. Il fascio ha equazione:

$$\lambda(x-2y)(x+2y+8)+\mu x^2=0.$$

Troviamo Γ imponendo il passaggio per $(-\frac{1}{2},0)$:

$$\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+8\right)+\mu\frac{1}{4}=0\Rightarrow\mu=15\lambda.$$

Quindi, Γ ha equazione:

$$16x^2-4y^2+8x-16y=0,$$

cioè:

$$4x^2-y^2+2x-4y=0.$$

La matrice associata alla conica è:

$$B=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&-1&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

e si vede che $|B|=-15\neq 0$. Quindi, Γ è una conica irriducibile. Inoltre:

$$|A|=\begin{vmatrix}4&0\\0&-1\end{vmatrix}=-4<0.$$

Quindi, Γ è un'iperbole e, essendo $\mathrm{Tr}(A)=3\neq 0$, non è equilatera. Per determinare gli asintoti di γ ci serve il suo centro di simmetria, che è individuato dalle prime due righe di B:

$$\begin{cases}4x+1=0\\-y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{4}\\y=-2.\end{cases}$$

Il centro è il punto $C=(-\frac{1}{4},-2)$. Gli asintoti sono le rette che congiungono C con i punti impropri di Γ. Troviamo questi punti:

$$\begin{cases}4x^2-y^2+2xt-4yt=0\\t=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\pm 2x\\t=0.\end{cases}$$

Quindi, i punti impropri di Γ sono $(1,2,0)$ e $(1,-2,0)$. Le rette che congiungono $C=(-\frac{1}{4},-2)$ con questi due punti sono:

$$y+2=2\left(x+\frac{1}{4}\right)\text{ e }y+2=-2\left(x+\frac{1}{4}\right),$$

cioè:

$$y=2x-\frac{3}{2}\text{ e }y=-2x-\frac{5}{2}.$$

3) La matrice associata al fascio di quadriche è:

$$B=\begin{pmatrix}1&h&0&0\\h&0&0&1\\0&0&-h&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}|B|=h(h+1)=0\quad\text{per } h=-1,0\\[1ex]|A|=h^3=0\quad\text{per } h=0.\end{array}$$

Quindi, le quadriche degeneri si hanno per $h=-1,0$. Consideriamo i casi particolari

- $h=0\quad x^2+2y-2z=0$: si tratta di un cilindro, perché la matrice associata

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\xmapsto{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$$

  ha rango 3;

- $h=-1 \quad x^2-2xy+z^2+2y-2z=0$: si tratta di un cono, perché $|A| \neq 0$.

Sia $h \neq 0, -1$. Dal polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h & 0 \\ h & -T & 0 \\ 0 & 0 & -h-T \end{vmatrix} = (-h-T)(T^2-T-h^2),$$

vediamo che gli autovalori non sono mai concordi, perché nell'equazione $T^2-T-h^2=0$ si ha $-1<0$ e $-h^2<0$. Quindi non abbiamo mai un ellissoide. Avremo:

- $h<-1$, $h>0$ iperboloidi iperbolici;
- $-1<h<0$ iperboloidi ellittici.