Ingegneria Civile, Gestionale (A-L). Compito di **Geometria** del 2/2/11

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & h & -1 \\ h+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare di h, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Dati i vettori $w_1 = (h, 0, 0, 0)$, $w_2 = (0, 0, h, 0)$, $w_3 = (0, h+1, 0, h)$ sia $W = \mathscr{L}(w_1, w_2, w_3)$. Verificare che per $h \neq 0$ si ha $\operatorname{Im} f = W$.
3) Detto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$, calcolare $f(V)$ al variare di h.
4) Detta $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione definita da:

$$p(x, y, z, t) = (y, z, t),$$

discutere, al variare di h, la semplicità di $\varphi = p \circ f$.

II

assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Dati la retta di equazioni

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

il piano π di equazione $x - y + 5 = 0$ e il punto $P = (1, 0, 1)$, determinare la retta $\mathbf{u}$ passante per P, parallela a π e ortogonale ad $\mathbf{r}$. Verificare se $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{u}$ sono complanari.
2) Determinare e studiare il fascio Φ di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 1)$ e $O = (0, 0)$. Determinare centro di simmetria e asintoti dell'iperbole passante per il punto $D = (2, -2)$.
3) Studiare il fascio di quadriche:

$$\psi : \quad 2x^2 + 2xy + hy^2 + z^2 + 2hx - 2hz = 0$$

al variare del parametro reale h.

SVOLGIMENTO

I

1) Riducendo la matrice $M(f)$ si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & h & -1 \\ h+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & h & 0 \\ h+1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per $h \neq 0$ il rango è 3, quindi f è iniettiva. Per $h = 0$ si ha: $\operatorname{Ker} f = \{(0, y, 0)\}$, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((2, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0))$.
2) Per $h \neq 0$ i vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti e si trova facilmente

$$W = \{(x, y, z, t) \mid hy - (h+1)t = 0\}$$

quindi basta verificare che $f(e_1) \in W$, $f(e_2) \in W$, $f(e_3) \in W$, per concludere che $\operatorname{Im} f = W$.
3) Scegliendo in V la base $v_1 = (1,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ avremo $f(V) = \mathscr{L}(f(v_1), f(e_3))$, con $f(v_1) = (2, h+1, 0, h)$, $f(e_3) = (-1, 0, -2, 0)$. Siccome questi due vettori sono indipendenti per ogni h, $\dim f(V) = 2$.
4)

$$\begin{array}{rlcl} \varphi(e_1) = & p(2,h+1,0,h) & = & (h+1,0,h) \\ \varphi(e_2) = & p(h,0,0,0) & = & (0,0,0) \\ \varphi(e_3) = & p(-1,0,-2,0) & = & (0,-2,0) \end{array} \quad \Rightarrow \quad M(\varphi) = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $P(T) = T^2(h+1-T)$. Si verifica facilmente che all'autovalore (doppio) $T = 0$ corrisponde l'autospazio $V_0 = \operatorname{Ker} f = \{(0,y,0)\}$ che ha dimensione 1, quindi φ non è semplice.

II

1) Detto $U_\infty \equiv (\alpha, \beta, \gamma, 0)$ il punto improprio di $\mathbf{u}$, siccome la retta $\mathbf{r}$ ha punto improprio $R_\infty \equiv (1,1,-2,0)$ ed il piano π ha vettore normale $\underline{n} = (1,-1,0)$, imponendo che U_∞ sia ortogonale ad entrambe le direzioni si ha

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma, \quad U_\infty \equiv (1,1,1,0) \quad \Rightarrow \mathbf{u} : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{r}$ sono sghembe.
2) Per determinare il fascio usiamo due delle tre coniche spezzate distinte di Φ:

$$\Phi : \, x(x-1) + y(y-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi : \, x^2 + hy^2 - x - hy = 0.$$

Le coniche spezzate che abbiamo usato si trovano per $h = 0$, $h = \infty$; la terza spezzata si ha per $h = -1$: $(x-y)(x+y-1) = 0$. Per caratterizzare le coniche irriducibili di Φ usiamo $|A| = h$:

$|A| > 0, \; h > 0$ ELLISSI. Per $h = 1$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 - x - y = 0$;

$|A| < 0, \; h < 0$ IPERBOLI. non ci sono iperboli equilatere;

$|A| = 0, \; h = 0$ non ci sono parabole.

L'iperbole passante per D si trova per $h = -3$ ed ha equazione $x^2 - 3y^2 - x + 3y = 0$; essa ha centro $H \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e punti impropri $(\pm\sqrt{3}, 1, 0)$. Quindi gli asintoti hanno equazioni $x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{3}(y - \frac{1}{2})$.
3) Consideriamo la matrice associata alla quadrica

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & h \\ 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ h & 0 & h & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} |B| = -h^2(3h-1) \\ \\ |A| = 2h - 1 \end{array}$$

Per $h = 0$ si ottiene un cono con vertice in O; per $h = \frac{1}{3}$ si ottiene un cono con vertice $(\frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{3})$. Per $h = \frac{1}{2}$ si ottiene un paraboloide ellittico ($|B| <=$). Per gli altri valori del parametro consideriamo il polinomio caratteristico di A:

$$P(T) = (1-T)(T^2 - (h+2)T + 2h - 1)$$

Per $h > \frac{1}{2}$ si hanno tre autovalori positivi, $|B| < 0$, quindi si hanno ellissoidi reali. Per $h \neq 0, \frac{1}{3}$, $h < \frac{1}{2}$, si trovano iperboloidi: ellittici se $h > \frac{1}{3}$, iperbolici se $h < \frac{1}{3}$.