CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCIV-Z)- Ingegneria Industriale (S-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 27 Settembre 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati il sottospazio vettoriale $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$ e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ così definito:

$$\begin{aligned} f(0,1,-1,0) &= (0, \tfrac{3}{2}, -1, \tfrac{1}{2}) \\ f(0,1,0,1) &= (0,2,0,2) \\ f(1,0,0,0) &= (0,h,0,0) \\ f(0,0,1,0) &= (1,-h,1,0). \end{aligned}$$

1) Studiare f al variare del parametro reale h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$ e le loro equazioni cartesiane.

2) Verificare che $V \subseteq \operatorname{Im} f$ per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

3) Verificare che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $f'\colon V \to V$ indipendente dal parametro.

4) Studiare la semplicità di f'.

5) Verificare che f' è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$ e determinare una base di autovettori di f'.

Soluzione

1) Dalle condizioni:

$$\begin{aligned} f(0,1,-1,0) &= (0, \tfrac{3}{2}, -1, \tfrac{1}{2}) \\ f(0,1,0,1) &= (0,1,0,1) \\ f(1,0,0,0) &= (0,h,0,0) \\ f(0,0,1,0) &= (1,-h,1,0). \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_2) - f(e_3) = (0, \frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}) \\ f(e_2) + f(e_4) = (0,1,0,1) \\ f(e_1) = (0,h,0,0) \\ f(e_3) = (1,-h,1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (0,h,0,0) \\ f(e_2) = (1, \frac{3}{2} - h, 0, \frac{1}{2}) \\ f(e_3) = (1,-h,1,0) \\ f(e_4) = (-1, h + \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}). \end{cases}$$

Quindi:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ h & \frac{3}{2} - h & -h & h + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M(f)| = -2h$, concludiamo che per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\ker f = \{(0,0,0,0)\}$. Vediamo che succede per $h = 0$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(1, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}), (1,0,1,0), (-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})]$. Cerchiamo l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 2z + 2t = 0.$$

Dunque:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}.$$

In particolare, vediamo che $\operatorname{Im} f = V$ per $h = 0$. Per quel che riguarda il nucleo, sappiamo che $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$. Le sue equazioni cartesiane le ricaviamo direttamente dalla matrice ottenuta riducendo $M(f)$:

$$\begin{aligned} \ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z - t = 0,\ \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}t = 0,\ 2y = 0\} = \\ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = t = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,0)) \end{aligned}$$

2) Dato che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ per $h \neq 0$ e che $\operatorname{Im} f = V$ per $h = 0$, allora è chiaro che $V \subseteq \operatorname{Im} f$ per ogni h.

3) Sappiamo che:

$$V = \{(y + z - t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)).$$

Per vedere che la restrizione di f a V induce un endomorfismo di V al variare di h dobbiamo verificare che $f(V) \subseteq V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Dal momento che:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,0,0), f(1,0,1,0), f(-1,0,0,1)),$$

dobbiamo vedere che $f(1,1,0,0), f(1,0,1,0), f(-1,0,0,1) \in V$. Da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ h & \frac{3}{2} - h & -h & h + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

abbiamo che $f(1,1,0,0) = (1, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ e $(1, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) \in V$ perché verifica la sua equazione cartesiana.
Da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ h & \frac{3}{2} - h & -h & h + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo che $f(1,0,1,0) = (1,0,1,0) \in V$.
Da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ h & \frac{3}{2} - h & -h & h + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

abbiamo che $f(-1,0,0,1) = (-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ e $(-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}) \in V$ perché verifica la sua equazione cartesiana. Quindi:

$$f(V) = \mathscr{L}((1, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}), (1,0,1,0), (-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})) \subseteq V$$

e abbiamo un endomorfismo $f' \colon V \to V$ dato da:

$$\begin{aligned} f'(1,1,0,0) &= (1, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ f'(1,0,1,0) &= (1,0,1,0) \\ f'(-1,0,0,1) &= (-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}). \end{aligned}$$

Dal momento che il parametro h non compare in nessuna delle immagini dei vettori della base di V, è evidente che f' è indipendente dal parametro h.

4) Detta $A = [(1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)]$ la base di V considerata in precedenza, vogliamo scrivere $M^{\mathscr{A}}(f')$. Per farlo, ci servono $[f(1,1,0,0)]_{\mathscr{A}}$, $[f(1,0,1,0)]_{\mathscr{A}}$ e $[f(-1,0,0,1)]_{\mathscr{A}}$. Il generico vettore di V è $(y+z-t, y, z, t)$ e:

$$(y+z-t, y, z, t) = y(1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(-1,0,0,1).$$

Questo significa che $[(y+z-t, y, z, t)]_{\mathscr{A}} = (y, z, t)$. Quindi:

$$\begin{aligned} [f'(1,1,0,0)]_{\mathscr{A}} &= [(1, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})]_{\mathscr{A}} = (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) \\ [f'(1,0,1,0)]_{\mathscr{A}} &= [(1,0,1,0)]_{\mathscr{A}} = (0,1,0) \\ [f'(-1,0,0,1)]_{\mathscr{A}} &= [(-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})]_{\mathscr{A}} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

e:

$$M^{\mathscr{A}}(f') = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il suo polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - T & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-T & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} - T \end{vmatrix} = (T-1)^2(2-T).$$

Calcoliamo V_1. Da:

$$M^{\mathscr{A}}(f') - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim V_1 = \dim V - \rho(M^{\mathscr{A}}(f') - I) = 2 = m_1$. Quindi, f' è semplice e:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c), \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, -a)\} = \\ &= \mathscr{L}((1,0,-1)_{\mathscr{A}}, (0,1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,1,0,0) - (-1,0,0,1), (1,0,1,0)) = \mathscr{L}((2,1,0,-1), (1,0,1,0)). \end{aligned}$$

Per $T = 2$, abbiamo:

$$M^{\mathscr{A}}(f') - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e:

$$\begin{aligned} V_2 &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c), -\frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 0, -b = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, 0, a)\} = \\ &= \mathscr{L}((1,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,1,0,0) + (-1,0,0,1)) = \mathscr{L}((0,1,0,1)). \end{aligned}$$

Quindi, una base di autovettori di f' è $[(2,1,0,-1), (1,0,1,0), (0,1,0,1)]$.

5) Da $V_1 = \mathscr{L}((2,1,0,-1),(1,0,1,0))$, $V_2 = \mathscr{L}((0,1,0,1))$ e:

$$(2,1,0,-1) \cdot (0,1,0,1) = 0$$
$$(1,0,1,0) \cdot (0,1,0,1) = 0,$$

vediamo che $V_1 \perp V_2$. Questo ci dice che esiste una base ortogonale di autovettori per f'. Infatti, sappiamo che esiste per Gram-Schmidt una base ortogonale $[u_1, u_2]$ per V_1 e, allora, sarà $[u_1, u_2, (0,1,0,1)]$ una base ortogonale di autovettori per f' e f' è, dunque, autoaggiunto.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Detta r la retta di equazioni $x - z = y + z - 1 = 0$, determinare la sua proiezione ortogonale sul piano $z = 0$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti agli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nei punti in cui essi secano la retta $s\colon x + y - 1 = z = 0$. In particolare, dire se in tale fascio esistono iperboli equilatere o circonferenze.

3) Determinare e studiare il fascio di quadriche contenenti la conica di equazioni:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ (x - z)z = 0 \end{cases}$$

e tangenti al piano improprio nel punto improprio dell'asse $\vec{y}$.

Soluzione

1) La proiezione ortogonale di r sul piano π è l'intersezione di π con il piano π' contenente r e ortogonale a π. I piani contenenti r hanno equazione:

$$\lambda(x - z) + \mu(y + z - 1) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y + (-\lambda + \mu)z - \lambda = 0.$$

Il piano π' è quello tale che il vettore di componenti $(\lambda, \mu, -\lambda + \mu)$ e il vettore di componenti $(0,0,1)$ sono ortogonali. Quindi, deve essere:

$$-\lambda + \mu = 0.$$

Dunque, $\pi'\colon x + y - 1 = 0$ e la retta cercata è:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2) Le uniche coniche spezzate del fascio sono la conica $xy = 0$, che è l'unione delle due tangenti, e la conica $(x + y - 1)^2 = 0$, che è la conica individuata dalla retta congiungente i due punti di tangenza. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:

$$\lambda xy + \mu(x + y - 1)^2 = 0.$$

Poniamo $h = \frac{\lambda}{\mu}$ e osserviamo che in questo modo stiamo escludendo la conica spezzata che si ottiene per $\mu = 0$, che è $xy = 0$. Quindi, possiamo scrivere l'equazione del fascio di coniche:

$$x^2 + (h + 2)xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Sappiamo già che le uniche coniche spezzate del fascio sono quella di equazione $xy = 0$ e la conica $(x + y - 1)^2 = 0$, che si ottiene per $h = 0$. Dunque, per $h \neq 0$ otteniamo coniche irriducibili. Passiamo a calcolare $|A|$ per classificare le coniche:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h+2}{2} \\ \frac{h+2}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 - 4h}{4}.$$

Quindi, $|A| > 0$ per $-4 < h < 0$, caso in cui abbiamo un'ellisse. Per $h = -2$ otteniamo una circonferenza, perché $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$. $|A| = 0$ per $h = 0$ e $h = -4$. Per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata, mentre per $h = -4$ abbiamo una parabola. $|A| < 0$ per $h < -4$ e $h > 0$ e otteniamo delle iperboli. Dato che $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} = 2 \neq 0$, non ci sono iperboli equilatere nel fascio.

3) Le quadriche contenenti la conica data hanno equazione:

$$(x+y-1)(ax+by+cz+d)+(x-z)z=0$$

$$\Rightarrow ax^2+(a+b)xy+(c+1)xz+by^2+cyz-z^2+(d-a)x+(d-b)y-cz-d=0.$$

La matrice associata è:

$$B=\begin{pmatrix} a & \frac{a+b}{2} & \frac{c+1}{2} & \frac{d-a}{2} \\ \frac{a+b}{2} & b & \frac{c}{2} & \frac{d-b}{2} \\ \frac{c+1}{2} & \frac{c}{2} & -1 & -\frac{c}{2} \\ \frac{d-a}{2} & \frac{d-b}{2} & -\frac{c}{2}-d & \end{pmatrix}.$$

Il piano tangente nel punto $(0,1,0,0)$ è dato dal prodotto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{a+b}{2} & \frac{c+1}{2} & \frac{d-a}{2} \\ \frac{a+b}{2} & b & \frac{c}{2} & \frac{d-b}{2} \\ \frac{c+1}{2} & \frac{c}{2} & -1 & -\frac{c}{2} \\ \frac{d-a}{2} & \frac{d-b}{2} & -\frac{c}{2} & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=0.$$

Vogliamo che questo piano sia $t=0$. Quindi, deve essere:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2}=0 \\ b=0 \\ \frac{c}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0. \end{cases}$$

Quindi, le quadriche cercate hanno equazione:

$$xz-z^2+dx+dy-d=0.$$

Una semplice verifica mostra che queste quadriche passano effettivamente per il punto $(0,1,0,0)$. La matrice associata è:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{2} & \frac{d}{2} & 0 & -d \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B|=\frac{d^2}{16}$ e che $|A|=0$. Quindi, per $d\neq 0$ abbiamo dei paraboloidi iperbolici, mentre per $d=0$ abbiamo la quadrica spezzata $(x-z)z=0$.