CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCIV-Z)- Ingegneria Industriale (S-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 23 Giugno 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (3,2,1,1)$, $v_2 = (0,1,0,2)$, $v_3 = (2,1,0,0)$ e i sottospazi $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y\}$ e $W = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$.

1) Determinare $V \cap W$ e $V + W$.

2) Studiare al variare del parametro reale h l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (2h-1, 2h-1, h, 3h-2) \\ f(1,1,0,1) &= (h,h,0,3h-2) \\ f(1,1,0,0) &= (1,1,0,2h-2) \\ f(0,1,0,0) &= (0,1,h-1,h-1), \end{aligned}$$

determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.

3) Determinare il valore di h per cui la restrizione di f a W induce un endomorfismo di $\psi\colon W \to W$. Verificare che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ per ogni h.

4) Verificare che φ è semplice per ogni h e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.

5) Verificare che i vettori $(0,0,1,-1)$, $(1,1,0,2)$, $(1,1,0,-1)$, $(1,0,1,-1)$ individuano una base di autovettori per f.

6) Determinare in $\mathbb{R}^4$ un prodotto scalare rispetto al quale f risulti autoaggiunto, giustificando il procedimento.

Soluzione

1) Osserviamo che $\dim W = 3$, dato che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 3. Calcoliamo l'equazione cartesiana di W:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + 4y - 2t = 0.$$

Dunque, $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + t = 0\}$ e quindi:

$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + t = 0,\ x - y = 0\} = \{(x, x, z, x) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$.

In particolare, $\dim(V \cap W) = 2$ e dalla formula di Grassmann:

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 3 + 3 - 2 = 4$$

e, dato che $V + W \subseteq \mathbb{R}^4$, deve essere $V + W = \mathbb{R}^4$.

2) Da:

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1, 1) &= (2h - 1, 2h - 1, h, 3h - 2) \\ f(1, 1, 0, 1) &= (h, h, 0, 3h - 2) \\ f(1, 1, 0, 0) &= (1, 1, 0, 2h - 2) \\ f(0, 1, 0, 0) &= (0, 1, h - 1, h - 1), \end{aligned}$$

ricaviamo:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 1 & h-1 & h-1 \\ 1-h & h-1 & h & 0 \\ h-1 & h-1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Riducendo $M(f)$, dopo aver scambiato R_3 e R_4, otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 1 & h-1 & h-1 \\ 0 & 0 & -2h^2 + 4h - 2 & -2h^2 + 5h - 2 \\ 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è ridotta di rango 4 se $h \neq 0$ e se $-2h^2 + 5h - 2 \neq 0$, cioè se $h \neq 0, 2, \frac{1}{2}$. Quindi, per $h \neq 0, 2, \frac{1}{2}$, concludiamo che f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva, che vuol dire $\ker f = \{(0, 0, 0, 0)\}$, e suriettiva, cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e, dato che gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano nelle prime tre colonne, concludiamo che le prime tre colonne di $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ generano $\operatorname{Im} f$, cioè $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, -1), (-1, -1, 0, 0))$. Per quel che riguarda il nucleo, vediamo che $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e che:

$$\ker f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z - t = 0,\ y - z - t = 0,\ -2z - 2t = 0\} = \mathscr{L}((0, 0, 1, -1)).$$

Sia $h = 2$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e, dato che gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano nelle prime tre colonne, concludiamo che le prime tre colonne di $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ generano

$\operatorname{Im} f$, cioè $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,-1,1),(0,1,1,1),(1,1,2,0))$. Per quel che riguarda il nucleo, vediamo che $\dim\ker f = \dim\mathbb{R}^4 - \dim\operatorname{Im} f = 1$ e che:

$$\ker f = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+z+t=0,\ y+z+t=0,\ 2z=0\} = \mathscr{L}((1,1,0,-1)).$$

Sia $h=\frac{1}{2}$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si vede che $\dim\operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e, dato che gli elementi speciali della matrice ridotta si trovano nelle prime tre colonne, concludiamo che le prime tre colonne di $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ generano $\operatorname{Im} f$, cioè $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(0,1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)) = \mathscr{L}((2,0,1,-1),(0,2,-1,-1),(-1,-1,1,0))$. Per quel che riguarda il nucleo, vediamo che $\dim\ker f = \dim\mathbb{R}^4 - \dim\operatorname{Im} f = 1$ e che:

$$\ker f = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}t=0,\ y-\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}t=0,\ \tfrac{1}{2}z=0\} = \mathscr{L}((1,1,0,2)).$$

3) Per vedere in quali casi $f|_W$ induce un endomorfismo di W dobbiamo vedere quando $f(W)\subseteq W$. Dato che $W=\mathscr{L}(v_1,v_2,v_3)$, allora $f(W)=\mathscr{L}(f(v_1),f(v_2),f(v_3))$. Calcoliamo $f(v_1)$, $f(v_2)$ e $f(v_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 1 & h-1 & h-1 \\ 1-h & h-1 & h & 0 \\ h-1 & h-1 & 0 & h \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2h+1\\2h\\1\\6h-5\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 1 & h-1 & h-1 \\ 1-h & h-1 & h & 0 \\ h-1 & h-1 & 0 & h \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2h-2\\2h-1\\h-1\\3h-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 1 & h-1 & h-1 \\ 1-h & h-1 & h & 0 \\ h-1 & h-1 & 0 & h \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-h+1\\3h-3\end{pmatrix}.$$

Quindi, $f(v_1)=(2h+1,2h,1,6h-5)$, $f(v_2)=(2h-2,2h-1,h-1,3h-1)$, $f(v_3)=(2,1,1-h,3h-3)$ e :

$$W=\mathscr{L}((2h+1,2h,1,6h-5),(2h-2,2h-1,h-1,3h-1),(2,1,1-h,3h-3)).$$

Dal momento che $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2y+t=0\}$, allora $f(W)\subseteq W$ se e solo se i vettori $(2h+1,2h,1,6h-5),(2h-2,2h-1,h-1,3h-1),(2,1,1-h,3h-3)$ stanno in W, cioè se e solo se verificano la sua equazione cartesiana:

$$\begin{aligned}
&(2h+1,2h,1,6h-5)\in W \Leftrightarrow 2h+1-4h+1=0 \Leftrightarrow h=1\\
&(2h-2,2h-1,h-1,3h-1)\in W \Leftrightarrow 2h-2-4h+2+3h-1=0 \Leftrightarrow h=1\\
&(2,1,1-h,3h-3)\in W \Leftrightarrow 2-2+3h-3=0 \Leftrightarrow h=1.
\end{aligned}$$

Quindi, per $h=1$ $f(W)\subseteq W$ e $f|_W$ induce un endomorfismo di W.

Per quel che riguarda V, si tratta di verificare che $f(V)\subseteq V$ per ogni valore di $h\in\mathbb{R}$. Dato che:

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=y\} = \{(x,x,z,t)\in\mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)),$$

allora

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((1,1,0,2h-2),(h-1,h-1,h,0),(h-1,h-1,0,h)).$$

Siccome, ovviamente, ognuno dei vettori $(1,1,0,2h-2),(h-1,h-1,h,0),(h-1,h-1,0,h)$ verifica l'equazione cartesiana di V, che è $x = y$, allora concludiamo che $f(V) \subseteq V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e che $f|_V$ induce un endomorfismo di V per ogni $h \in \mathbb{R}$.

4) Abbiamo visto che una base di V è $\mathscr{A} = [(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$. Inoltre, $V = \{(x,x,z,t) \in \mathbb{R}^4\}$ e, preso $(x,x,z,t) \in V$, $[(x,x,z,t)]_{\mathscr{A}} = (x,z,t)$. Quindi:

$$\begin{aligned}
f(1,1,0,0) &= (1,1,0,2h-2) \Rightarrow [f(1,1,0,0)]_{\mathscr{A}} = (1,0,2h-2)\\
f(0,0,1,0) &= (h-1,h-1,h,0) \Rightarrow [f(0,0,1,0)]_{\mathscr{A}} = (h-1,h,0)\\
f(0,0,0,1) &= (h-1,h-1,0,h) \Rightarrow [f(0,0,0,1)]_{\mathscr{A}} = (h-1,0,h).
\end{aligned}$$

Dunque:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & h-1 \\ 0 & h & 0 \\ 2h-2 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h-1 & h-1 \\ 0 & h-T & 0 \\ 2h-2 & 0 & h-T \end{vmatrix} = (h-T)[T^2-(h+1)T-2h^2+5h-2],$$

da cui segue che gli autovalori sono $h, 2h-1, -h+2$. Questi sono a due a due distinti tra loro quando $h \neq 1$. Quindi, per $h \neq 1$ possiamo dire che φ è semplice. Cerchiamo una base di autovettori di φ quando $h \neq 1$.

Consideriamo $T = h$. Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) - hI = \begin{pmatrix} 1-h & h-1 & h-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2h-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e:

$$\begin{aligned}
V_h &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ (1-h)a+(h-1)b+(h-1)c = 0,\ (2h-2)a = 0\} =\\
&= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0,b,-b)\} = \mathscr{L}((0,1,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((0,0,1,0)-(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((0,0,1,-1)).
\end{aligned}$$

Consideriamo $T = 2h-1$. Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) - (2h-1)I = \begin{pmatrix} 2-2h & h-1 & h-1 \\ 0 & 1-h & 0 \\ 2h-2 & 0 & 1-h \end{pmatrix}$$

e:

$$\begin{aligned}
V_{2h-1} &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ (2-2h)a+(h-1)b+(h-1)c = 0,\ (1-h)b = 0\} =\\
&= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,0,2a)\} = \mathscr{L}((1,0,2)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,1,0,0)+2(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((1,1,0,2)).
\end{aligned}$$

Consideriamo $T = -h+2$. Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(\varphi) - hI = \begin{pmatrix} h-1 & h-1 & h-1 \\ 0 & 2h-2 & 0 \\ 2h-2 & 0 & 2h-2 \end{pmatrix}$$

e:

$$\begin{aligned}V_{-h+2} &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ (h-1)a+(h-1)b+(h-1)c = 0,\ (2h-2)b = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,0,-a)\} = \mathscr{L}((1,0,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}((1,1,0,0)-(0,0,0,1)) = \mathscr{L}((1,1,0,-1)).\end{aligned}$$

Quindi, per $h \neq 1$ una base di autovettori è $[(0,0,1,-1),(1,1,0,2),(1,1,0,-1)]$ e, dal momento che il parametro h non compare in nessuno di questi vettori, questa è una base di autovettori anche per $h = 1$ ed è la base di autovettori indipendente dal parametro che bisognava trovare.

5) Dal momento che $(0,0,1,-1)$ è autovettore per φ associato a h, $(1,1,0,2)$ è autovettore per φ associato a $2h-1$ e $(1,1,0,-1)$ è autovettore per φ associato a $-h+2$ e dal momento che φ è indotta da f, possiamo dire che:

$$\begin{aligned}f(0,0,1,-1) &= \varphi(0,0,1,-1) = h(0,0,1,-1)\\ f(1,1,0,2) &= \varphi(1,1,0,2) = (2h-1)(1,1,0,2)\\ f(1,1,0,-1) &= \varphi(1,1,0,-1) = (-h+2)(1,1,0,-1).\end{aligned}$$

Questo significa che i vettori $(0,0,1,-1),(1,1,0,2),(1,1,0,-1)$ sono anche autovettori per f. Verifichiamo, ora, che $(1,0,1,-1)$ è un autovettore per f:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & 1 & h-1 & h-1 \\ 1-h & h-1 & h & 0 \\ h-1 & h-1 & 0 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

cioè $f(1,0,1,-1) = (1,0,1,-1)$, che vuol dire che $(1,0,1,-1)$ è un autovettore per f associato all'autovalore 1. Dunque, i vettori $(0,0,1,-1)$, $(1,1,0,2)$, $(1,1,0,-1)$, $(1,0,1,-1)$ sono autovettori per f e, dato che $(0,0,1,-1)$, $(1,1,0,2)$, $(1,1,0,-1)$ sono linearmente indipendenti in quanto base di V e dato che $(1,0,1,-1) \notin V$, allora $(0,0,1,-1)$, $(1,1,0,2)$, $(1,1,0,-1)$, $(1,0,1,-1)$ sono una base di $\mathbb{R}^4$ e, in particolare, una base di autovettori per f.

6) Per il Teorema Spettrale f è autoaggiunto, rispetto a un dato prodotto scalare, se e solo se ammette una base ortonormale di autovettori. Quindi, per quanto visto nel punto precedente, un prodotto scalare per il quale f è autoaggiunto è quello per il quale la base di autovettori $(0,0,1,-1)$, $(1,1,0,2)$, $(1,1,0,-1)$, $(1,0,1,-1)$ è una base ortonormale. Sia $*$ il prodotto scalare per il quale $\mathscr{B} = [(0,0,1,-1),\ (1,1,0,2),\ (1,1,0,-1),\ (1,0,1,-1)]$ è una base ortonormale. Dobbiamo calcolare $(x,y,z,t) * (x',y',z',t')$ per ogni $(x,y,z,t),(x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$. Per fare questo ci servono $[(x,y,z,t)]_{\mathscr{B}}$ e $[(x',y',z',t')]_{\mathscr{B}}$.

$$(x,y,z,t) = a(0,0,1,-1) + b(1,1,0,2) + c(1,1,0,-1) + d(1,0,1,-1) = (b+c+d, b+c, a+d, -a+2b-c-d)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c+d = x \\ b+c = y \\ a+d = z \\ -a+2b-c-d = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -x+y+z \\ b = -\frac{y+z+t}{3} \\ c = \frac{2y-z-t}{3} \\ d = x-y. \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}[(x,y,z,t)]_{\mathscr{B}} &= (-x+y+z, \frac{y+z+t}{3}, \frac{2y-z-t}{3}, x-y)\\ [(x',y',z',t')]_{\mathscr{B}} &= (-x'+y'+z', \frac{y'+z'+t'}{3}, \frac{2y'-z'-t'}{3}, x'-y')\end{aligned}$$

e, dal momento che $\mathscr{B}$ è una base ortonormale, concludiamo che:

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) * (x',y',z',t') = (-x+y+z)(-x'+y'+z') + \frac{y+z+t}{3}\frac{y'+z'+t'}{3} + \\ + \frac{2y-z-t}{3}\frac{2y'-z'-t'}{3} + (x-y)(x'-y').\end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:

$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s\colon \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0, \end{cases}$$

e dato il punto $P = (2, 0, 1)$, determinare la retta t passante per P e incidente con r e con s. Calcolare gli angoli $\widehat{rt}$ e $\widehat{st}$. Calcolare la distanza tra r e s.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$(h+1)x^2 - y^2 + (h+2)x + 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, le coniche spezzate e i punti base. Verificare che per $h = 1$ si ottiene un'iperbole Γ. Determinare un'equazione canonica, gli assi di simmetria e gli asintoti di Γ.

3) Determinare il cono di vertice $V = (0, 0, 1)$ e contenente Γ.

Soluzione

1) La retta t è la retta intersezione del piano contenente r e P con il piano contenente s e P. Troviamo il piano contenente r e P. Il fascio di piani contenente r è:

$$\lambda x + \mu(y + z + 1) = 0$$

e, quando imponiamo il passaggio per $P = (2, 0, 1)$, troviamo $2\lambda + 2\mu = 0$, cioè $\mu = -\lambda$. Quindi, il primo piano è $x - y - z - 1 = 0$. Cerchiamo il piano contenente s e P:

$$\lambda(x + y - 5) + \mu(y - z + 1) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P abbiamo $-3\lambda = 0$, cosicché il piano contenente s e P è $y - z + 1 = 0$. Dunque, la retta t è:

$$\begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

I parametri direttori di t sono:

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, 1).$$

Dato che:

$$r\colon \begin{cases} x = 0 \\ z = -y - 1 \end{cases} \text{ e } s\colon \begin{cases} x = -y + 5 \\ z = y + 1, \end{cases}$$

vediamo che i parametri direttori di r e s sono, rispettivamente, $(0, 1, -1)$ e $(1, -1, -1)$. Dunque, $(2, 1, 1)$ sono componenti di un vettore parallelo a t e $(0, 1, -1)$ sono componenti di un vettore parallelo a r. Questo vuol dire che l'angolo individuato da r e da t è l'angolo individuato da questi due vettori:

$$\cos \hat{tr} = \frac{1 - 1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \hat{tr} = \frac{\pi}{2}.$$

Analogamente, $(1, -1, -1)$ sono le componenti di un vettore parallelo a s e l'angolo individuato da s e da t è l'angolo individuato da questi due vettori:

$$\cos \hat{ts} = \frac{2 - 1 - 1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \hat{ts} = \frac{\pi}{2}.$$

Questo vuol dire che la retta t è ortogonale e incidente a entrambe le rette. Quindi, se $R = t \cap r$ e $S = t \cap s$, vediamo che $d(r,s) = \overline{RS}$.

$$R = t \cap r\colon \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0, \end{cases}$$

da cui $R = (0, -1, 0)$. Nello stesso modo:

$$S = t \cap s\colon \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2, \end{cases}$$

da cui segue che $S = (4, 1, 2)$. Dunque $d(r,s) = \overline{RS} = 2\sqrt{6}$.

2) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & \dfrac{h+2}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{h+2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che $|B| = \dfrac{h^2}{4}$. Quindi, una conica spezzata del fascio si trova per $h = 0$:

$$x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x + y + 1)(x - y + 1) = 0.$$

L'altra conica spezzata è quella nascosta. Infatti, l'equazione del fascio può essere scritta in questo modo:

$$x^2 - y^2 + 2x + 1 + h(x^2 + x) = 0.$$

Quindi, l'altra conica spezzata del fascio è $x(x+1) = 0$. I punti base del fascio possono essere trovati intersecando le due coniche spezzate:

$$\begin{cases} x(x+1) = 0 \\ (x + y + 1)(x - y + 1) = 0, \end{cases}$$

da cui troviamo i punti $(0, 1)$, $(0, -1)$ e il punto $(-1, 0)$ contato due volte. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} h+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -h - 1.$$

Quindi, per $h < -1$ $|A| > 0$ e abbiamo delle ellissi. In particolare, per $h = -2$ abbiamo una circonferenza, perché $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$. Per $h = -1$ si ha $|A| = 0$ e abbiamo una parabola. Per $h > -1$, $h \neq 0$, abbiamo iperboli. Dato che $\mathrm{Tr}(A) = h$, vediamo che non ci sono iperboli equilatere.

Per quanto detto per $h = 1$ abbiamo un'iperbole:

$$\Gamma\colon 2x^2 - y^2 + 3x + 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che il centro di simmetria è dato da:

$$\begin{cases} 2x + \frac{3}{2} = 0 \\ -y = 0, \end{cases}$$

da cui vediamo che il centro di simmetria è il punto $C = (-\frac{3}{4}, 0)$. Dato che $a_{12} = 0$, gli assi di simmetria sono le rette parallele agli assi cartesiani e passanti per C, cioè sono $x = -\frac{3}{4}$ e $y = 0$. Per calcolare gli asintoti troviamo i punti impropri di Γ:

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3xt + t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{2}x \\ t = 0, \end{cases}$$

da cui vediamo che i punti impropri sono $(1, \sqrt{2}, 0)$ e $(1, -\sqrt{2}, 0)$. Gli asintoti sono le rette congiungenti C con i due punti impropri, cioè sono:

$$y = \sqrt{2}(x + \frac{3}{4})$$
$$y = -\sqrt{2}(x + \frac{3}{4}).$$

Infine, dato che A è diagonale vediamo che, nella forma canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, possiamo prendere $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Inoltre, deve essere $-\alpha\beta\gamma = |B| = \frac{1}{4}$, di modo che $\gamma = \frac{1}{8}$. Dunque, una forma canonica di Γ è:

$$2X^2 - Y^2 = \frac{1}{8}.$$

3) Dato che:

$$\Gamma\colon \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3x + 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

il generico punto di Γ è $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove $2\alpha^2 - \beta^2 + 3\alpha + 1 = 0$. Il cono è descritto dalle rette PV, che hanno equazione:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z-1}{-1},$$

da cui segue che:

$$\alpha = \frac{x}{1-z} \text{ e } \beta = \frac{y}{1-z}.$$

Sostituendo in $2\alpha^2 - \beta^2 + 3\alpha + 1 = 0$ otteniamo:

$$2\left(\frac{x}{1-z}\right)^2 - \left(\frac{y}{1-z}\right)^2 + 3\frac{x}{1-z} + 1 = 0,$$

da cui segue:

$$2x^2 - y^2 + 3x(1-z) + (1-z)^2 = 0,$$

che è l'equazione del cono cercato.