CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 23 Febbraio 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(1,-1,0) &= (h+1,-h-1,0) \\ f(1,0,1) &= (0,h-1,h+2) \\ f(0,1,-1) &= (h-1,0,-h), \end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, nucleo e immagine di f.
2) Nei casi in cui f non è un isomorfismo stabilire se la somma $\ker f + \operatorname{Im} f$ è diretta o meno.
3) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.
4) Calcolare $f^{-1}(h+1,-h-1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Da:

$$\begin{aligned} f(1,-1,0) &= (h+1,-h-1,0) \\ f(1,0,1) &= (0,h-1,h+2) \\ f(0,1,-1) &= (h-1,0,-h), \end{aligned}$$

otteniamo:
$$\begin{cases} f(e_1)-f(e_2) = (h+1,-h-1,0) \\ f(e_1)+f(e_3) = (0,h-1,h+2) \\ f(e_2)-f(e_3) = (h-1,0,-h) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (h,-1,1) \\ f(e_2) = (-1,h,1) \\ f(e_3) = (-h,h,h+1). \end{cases}$$

Quindi, la matrice associata a f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & -1 & -h \\ -1 & h & h \\ 1 & 1 & h+1 \end{pmatrix}$$

e si vede che $|M(f)| = (h+1)^2(h-1)$. Dunque, per $h \neq -1, 1$ f è un isomorfismo.

Sia $h = 1$. Allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,-1,1),(-1,1,1)]$. Inoltre, $\dim \ker f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0,\ 2x + z = 0\} = \{(x, 3x, -2x) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,3,-2)).$$

Sia $h = -1$. Allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(-1,-1,1),(1,-1,0)]$. Inoltre, $\dim \ker f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0,\ -2x - 2y = 0\} = \{(x,-x,0) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

2. Sia $h = -1$. Sappiamo che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,-1,1),(-1,1,1))$ e che $\ker f = \mathscr{L}((1,3,-2))$. Calcoliamo l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y = 0,$$

da cui segue che $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$. Dato che $\ker f = \mathscr{L}((1,3,-2))$ e che $(1,3,-2) \notin \operatorname{Im} f$, vediamo che $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \mathscr{L}((0,0,0))$. Dunque, per $h = 1$ la somma $\operatorname{Im} f + \ker f$ è diretta.

Sia $h = -1$. In tal caso, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-1,-1,1),(1,-1,0))$ e che $\ker f = \mathscr{L}((1,-1,0))$. Dunque, $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \mathscr{L}((1,-1,0)) \neq \mathscr{L}((0,0,0))$ e la somma $\operatorname{Im} f + \ker f$ non è diretta.

3. Calcoliamo il polinomio caratteristico di f:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h - T & -1 & -h \\ -1 & h - T & h \\ 1 & 1 & h + 1 - T \end{vmatrix} = (h + 1 - T)^2 (h - 1 - T).$$

Dunque, gli autovalori sono $h+1$ con $m_{h+1} = 2$ e $h-1$ con $m_{h-1} = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_{h+1} \leq 2$ e che $\dim V_{h-1} = 1 = m_{h-1}$. Dunque, per vedere se f è semplice dobbiamo vedere se $\dim V_{h+1} = 2$:

$$M(f - (h+1) i_{\mathbb{R}^3}) = M(f) - (h+1)I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -h \\ -1 & -1 & h \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $V_{h+1} = \ker(f - (h+1) i_{\mathbb{R}^3})$, vediamo che $\dim V_{h+1} = 3 - \rho(M(f) - (h+1)I)$. Inoltre, il seguente minore di $M(f) - (h+1)I$:

$$\begin{vmatrix} -1 & h \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -h$$

è non nullo per $h \neq 0$. Dunque, se $h \neq 0$, $\rho(M(f) - (h+1)I) = 2$ e $\dim V_{h+1} = 1 < 2 = m_{h+1}$. Quindi, per $h \neq 0$ possiamo dire che f non è semplice. Sia $h = 0$. In tal caso, $h + 1 = 1$ e:

$$M(f - (h+1) i_{\mathbb{R}^3}) = M(f) - (h+1)I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f) - I) = 1$ e $\dim V_1 = 2 = m_1$ e possiamo dire che per $h = 0$ f è semplice. Inoltre:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0),(0,0,1)).$$

Sempre per $h = 0$ calcoliamo, ora, V_{-1}:

$$M(f+I) = M(f) + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y=0,\ x+y+2z=0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)).$$

Dunque, pr $h = 0$ una base di autovettori è $[(1,-1,0),(0,0,1),(1,1,-1)]$.

4. Dobbiamo risolvere il sistema associato alla matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & -1 & -h & h+1 \\ -1 & h & h & -h-1 \\ 1 & 1 & h+1 & 0 \end{array}\right).$$

La matrice incompleta associata al sistema è $M(f)$ e sappiamo che per $h \neq -1, 1$ $\rho(M(f)) = 3$. Quindi, per $h \neq -1, 1$ sappiamo che il sistema ha una sola soluzione e, dato che $f(1,-1,0) = (h+1, -h-1, 0)$, possiamo dire che per $h \neq 1, -1$:

$$f^{-1}(h+1, -h-1, 0) = \{(1,-1,0)\}.$$

Sia $h = -1$. In tal caso, $(h+1, -h-1, 0) = (0,0,0)$ e:

$$f^{-1}(h+1,-h-1,0) = f^{-1}(0,0,0) = \ker f = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Sia $h = 1$. Allora dobbiamo risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

da cui segue che per $h = 1$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(h+1,-h-1,0) = f^{-1}(2,-2,0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=2,\ 2x+z=2\} = \\ = \{(x, 3x-4, -2x+2) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato il punto $P = (1,-1,1)$, determinare il piano π passante per P e ortogonale all'asse $\vec{z}$. Determinare la retta r del piano π incidente l'asse $\vec{z}$ e passante per P.

2) Determinare l'iperbole Γ del piano $z = 0$ avente gli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ come asintoti e passante per $A = (2,1,0)$. Calcolare una forma canonica di Γ.

3) Determinare il paraboloide contenente la conica:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

e passante per i punti $P_1 = (1,0,1)$, $P_2 = (0,1,1)$ e $P_3 = (1,1,1)$. Determinare la natura del paraboloide.

Soluzione

1. L'asse $\vec{z}$ ha equazioni:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
e, dunque, ha parametri direttori $(0, 0, 1)$. Quindi, il piano π ha equazione $z = 1$. La retta r cercata è intersezione del piano π con il piano π' contenente l'asse $\vec{z}$ e il punto P. Cerchiamo il piano π':
$$\lambda x + \mu y = 0.$$
Imponiamo il passaggio per P:
$$\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0.$$
Dunque, il piano π' ha equazione $x + y = 0$ e la retta r ha equazioni:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

2. Le iperboli che hanno $\vec{x}$ e $\vec{y}$ come asintoti hanno equazione del tipo:
$$xy = k.$$
Per determinare Γ imponiamo il passaggio per A:
$$2 = k.$$
Dunque, Γ ha equazione $xy = 2$. Cerchiamo una forma canonica di Γ. La matrice associata è:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
mentre quella associata alla forma canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$ è:
$$B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$
Deve essere $|B| = |B'|$, cioè $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}$. Inoltre, α e β sono gli autovalori della matrice A:
$$P(T) \begin{vmatrix} -T & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -T \end{vmatrix} = T^2 - \frac{1}{4}.$$
Quindi, gli autovalori di A sono $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Scegliamo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$. Quindi, deve essere $\gamma = 2$ e una forma canonica di Γ è:
$$\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 2 \Rightarrow X^2 - Y^2 = 4.$$

3. Le quadriche contenenti la conica assegnata hanno equazione:
$$x^2 - y^2 - 1 + z(ax + by + cz + d) = 0.$$
Imponendo il passaggio per i punti P_1, P_2, P_3 otteniamo il sistema:
$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ b + c + d = 2 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ d = 1 - c. \end{cases}$$

Otteniamo le quadriche di equazione:

$$x^2 - y^2 + cz^2 - xz + yz + (1-c)z - 1 = 0.$$

La matrice associata a queste quadriche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & c & \frac{1-c}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-c}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Il paraboloide è tale che $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & c \end{vmatrix} = -c.$$

Dunque, il paraboloide è tale che $c = 0$ e ha equazione:

$$x^2 - y^2 - xz + yz + z - 1 = 0.$$

Osserviamo, poi, che, dal momento che contiene la conica di equazioni $z = x^2 - y^2 - 1 = 0$ che è un'iperbole, il paraboloide è iperbolico.