Ingegneria Civile e Ambientale, Ingegneria Gestionale (A-L), Ingegneria Rea,
Compito di **Algebra Lineare e Geometria** del 20/7/11

I

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{A} = \{\underline{v_1} = (1,0,-1), \underline{v_2} = (0,1,-1), \underline{v_3} = (0,0,2)\}$.
Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla matrice rispetto la base $\mathcal{A}$:

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(h-1) & h-1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Studiare f, determinando, in particolare, al variare di h, le equazioni cartesiane di nucleo e immagine.

2) Determinare la matrice dell'endomorfismo f, $M(f)$, associata alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

3) Studiare la semplicità di f al variare di h.

4) Determinare l'ortogonale del sottospazio$V = \mathcal{L}(\underline{v_1}, \underline{v_2})$. Provare che $(V^\perp)^\perp = V$. Verificare, infine, se esiste almeno un valore di h per cui f risulti autoaggiunto rispetto al prodotto scalare euclideo.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
1) Sono assegnati la retta $\mathbf{r}$ ed un piano π di equazioni

$$\mathbf{r} : \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \pi : \ 3y + 3z + 5 = 0$$

Determinare la generica retta $\mathbf{s}$ incidente con $\mathbf{r}$ e ortogonale al piano π. Trovare il piano π' luogo delle rette $\mathbf{s}$. Determinare le coordinate dei punti A e B della retta $\mathbf{r}$ che hanno distanza dal piano π uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Sul piano coordinato $z = 0$ determinare l'iperbole equilatera Γ avente per asintoti le rette $\mathbf{r}_1 \ : \ x + y - 1 = 0$ e $\mathbf{r}_2 \ : \ x - y = 0$ e passante per il punto $P = (1, \frac{1}{2})$.
Determinare una equazione canonica di Γ , centro e assi.

3) Determinare e studiare il fascio di quadriche ϕ contenenti la conica

$$\Gamma : \begin{cases} z = 0 \\ 4x^2 - 4y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

e passanti per i punti $A = (1,0,1)$, $B = (0,0,1)$, $C = (1,1,1)$.

SVOLGIMENTO, I

1) Dato che conosciamo la matrice

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(h-1) & h-1 & 2 \end{pmatrix}$$

con facili calcoli si trova il suo determinante: $|M^{\mathcal{A}}(f)| = -2h^2$, quindi per $h \neq 0$ f è isomorfismo. Se $h = 0$ si ha rango della matrice uguale ad uno e quindi $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,0,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(\underline{v}_3) = \{(x,y,z,t) \mid x = y = 0\}$. Possiamo scegliere per $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,1,\frac{1}{2})_{\mathcal{A}}, (1,0,\frac{1}{4})_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}((0,2,1)_{\mathcal{A}}, (4,0,1)_{\mathcal{A}}) = \mathscr{L}(2v_2 + v_3, 4v_1 + v_3) = \mathscr{L}((0,2,0),(4,0,-2))$. Per trovare la sua equazione cartesiana costruiamo la seguente matrice e imponiamo che il suo rango non sia massimo (nel nostro caso si traduce in determinante uguale a zero):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

il cui determinante $-4x - 8z = 0, \Rightarrow x + 2z = 0$.

2) La matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche si ricava sapendo che dal testo conosciamo

$$\begin{cases} f(\underline{v_1}) = h\underline{v_2} + \frac{1}{2}(h-1)\underline{v_3} \\ f(\underline{v_2}) = h\underline{v_1} + (h-1)\underline{v_3} \\ f(\underline{v_3}) = 2\underline{v_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} f(1,0,-1) = (0,h,-1) \\ f(0,1,-1) = (h,0,h-2) \\ f(0,0,2) = (0,0,4) \end{cases}$$

quindi si ricava

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h & 0 & 0 \\ 1 & h & 2 \end{pmatrix}$$

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$P(T) = T^3 - 2T^2 - h^2T + 2h^2 = (T-2)(T-h)(T+h)$$

Si trovano facilmente gli autovalori $T = 2, h, -h$. Per $h \neq 0, -2, 2$ si hanno tre autovalori distinti, quindi f è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi.

- $T = 2 \quad V_2 = \operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & h & 0 \\ h & -2 & 0 \\ 1 & h & 0 \end{pmatrix} = \mathscr{L}(u_1 = (0,0,1))$;
- $T = h \quad V_h = \operatorname{Ker} f_h = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -h & h & 0 \\ h & -h & 0 \\ 1 & h & 2-h \end{pmatrix} = \mathscr{L}(u_2 = (1,1,-\frac{(1+h)}{2-h}))$;
- $T = -h \quad V_{-h} = \operatorname{Ker} f_{-h} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} h & h & 0 \\ h & h & 0 \\ 1 & h & 2+h \end{pmatrix} = \mathscr{L}(u_3 = (1,-1,\frac{h-1}{h+2}))$.

Se $h = 0$, abbiamo $T = 0$ con molteplicità algebrica $m_0 = 2$ e $T = 2$ con $m_2 = 1$. Calcoliamo la $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2$ quindi f è semplice.
Se $h = 2$, abbiamo $T = 2$ con molteplicità algebrica $m_2 = 2$ e $T = -2$ con $m_{-2} = 1$. Calcoliamo la $\dim V_2 = \dim \operatorname{Ker} f_2 = 3 - \rho(M(f) - 2I) = 3 - 2 = 1$ quindi f non è semplice.
Se $h = -2$, abbiamo $T = 2$ con molteplicità algebrica $m_2 = 2$ e $T = -2$ con $m_{-2} = 1$. Calcoliamo la $\dim V_2 = \dim \operatorname{Ker} f_2 = 3 - \rho(M(f) - 2I) = 3 - 2 = 1$ quindi f non è semplice.
4) La ricerca dell'ortogonale di un dato sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^3$ non presenta particolari problemi: la strategia più semplice consiste nel determinare i vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono ortogonali ad una base di V. Quindi per definizione si ha

$$V^{\perp} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 | \quad \forall \quad \underline{v} \in V \quad \underline{x} \cdot \underline{v} = 0\}$$

allora consideriamo $\underline{x} = (x, y, z)$ e una base di V costituita dai generatori dati nel testo che verifichiamo facilmente essere linearmente indipendenti, imponiamo che il prodotto scalare con ognuno di essi sia zero:

$$\begin{cases} (x,y,z)\cdot(1,0,-1) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Concludiamo che

$$V^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \quad x - z = y - z = 0\} = \{(x,x,x)\}$$

In modo analogo costruiamo $(V^\perp)^\perp$ e si vede che risulta la stessa equazione cartesiana di V, $x + y + z = 0$.
Inoltre per verificare se l'endomorfismo f è **autoaggiunto** ricordiamo la proposizione che afferma f è autoaggiunto se e solo se la matrice associata ad f rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{A}$ simmetrica e poichè $M(f)$ non è mai simmetrica, non esiste valore di h per cui f risulta autoaggiunto.

II

1) Poniamo $R \equiv (\alpha + 3, 2, \alpha)$ come punto generico di $\mathbf{r}$; scriviamo la retta passante per R e di parametri direttori gli stessi del piano π, $(0, 3, 3)$ e otteniamo:

$$\mathbf{s} : \begin{cases} x - \alpha - 3 = 0 \\ y - 2 = z - \alpha \end{cases}$$

quindi il luogo si ottiene eliminado il parametro α :

$$\pi' : \ x + y - z - 5 = 0$$

Infine imponiamo che la distanza punto $R = (\alpha + 3, 2, \alpha)$ dal piano π sia uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{|6 + 3\alpha + 5|}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |3\alpha + 11| = 3 \Rightarrow 3\alpha + 11 = \pm 3$$

quindi $\alpha = -\frac{8}{3}, -\frac{14}{3}$ cosicchè le coordinate dei punti cercati sono:

$$A = (\frac{1}{3}, 2, -\frac{8}{3}), \quad B = (-\frac{5}{3}.2, -\frac{14}{3})$$

2) Consideriamo il fascio di iperboli aventi come asintoti le rette date:

$$(x + y - 1)(x - y) + \lambda = 0$$

Imponiamo il passaggio per il punto $P = (1, \frac{1}{2})$ e ricaviamo che $\lambda = -\frac{1}{4}$.
Quindi la nostra conica Γ ha equazioni:

$$\begin{cases} z = 0 \\ 4x^2 - 4y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Con sempici calcoli dal sistema

$$\begin{cases} 4x_0 - 2 = 0 \\ -4y_0 + 2y = 0 \end{cases}$$

si ottiene $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e poichè in questo caso gli assi sono paralleli agli assi cartesiani (manca il termine in xy) le loro equazioni rispettivamente sono:

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{2}$$

Dato che si tratta di un'iperbole la sua forma canonica è del tipo:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$$

dove α, β sono le soluzioni del polinomio caratteristico della matrice A:

$$P.C.: \quad (4 - T)(4 + T) = 0; \Rightarrow \alpha = 4, \beta = -4$$

infine $\gamma = -\frac{|B|}{\alpha\beta} = \frac{16}{16} = 1$. La sua forma canonica è : $4X^2 - 4Y^2 = 1$.
3) La generica quadrica contenente Γ ha equazione

$$z(ax + by + cz + d) + 4x^2 - 4y^2 - 4x + 4y - 1 = 0;$$

imponendo che questa quadrica passi per i tre punti si trovano le condizioni

$$\begin{cases} a + c + d - 1 = 0 \\ c + d - 1 = 0 \\ a + b + c + d - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 0, b = 0, c = 1 - d.$$

quindi il fascio di quadriche ϕ ha equazione $4x^2 - 4y^2 + (1 - d)z^2 - 4x + 4y + dz - 1 = 0$. Consideriamo la matrice associata alla generica quadrica del fascio

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 - d & \frac{d}{2} \\ -2 & 2 & \frac{d}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = 4d^2 - 16d + 16 = 4(d - 2)^2 \\ \\ |A| = 16d - 16 \end{array}$$

Quindi se $d \neq 2$ si hanno quadriche non degeneri. Se $|A| = 16d - 16 = 0$ e quindi $d = 1$ si tratta di paraboloide iperbolico essendo in questo valore il determinante di B positivo.

Inoltre il polinomio caratteristico di A è :

$$T^3 + (d - 1)T^2 - 16T + 16 - 16d = 0$$

e si vede facilmente che non possono esistere ellissoidi. Quindi si tratta di iperboloidi iperbolici per $d \neq 2, 1$. Se $d = 2$ si ottiene un cono, dato che $|A| \neq 0$.