Ingegneria Civile, Gestionale (A-L), REA Compito di **Geometria** del 1/3/11

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le assegnazioni

$$\begin{cases} f(0,1,1) &= (2, 2+h, 2-h) \\ f(1,1,-1) &= (0,0,-2) \\ f(0,1,-1) &= (0,h,-2-h) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1. Studiare f al variare di h determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Dato il sottospazio $V = \{(x,y,z) \mid x - y = 0\}$ determinare, al variare di h, $f(V)$ e verificare che si ha $f(V) = V$.
3. Calcolare, al variare di h, la controimmagine
$$f^{-1}(0,0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = (0,0,1)\}.$$
4. Discutere la semplicità di f e determinare una base di autovettori quando essa esiste.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Date le rette
$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} .$$
determinare la retta u ortogonale ed incidente ad r e ad s. Detti $R = u \cap r$ ed $S = u \cap s$, sia S la sfera che ha diametro RS. Verificare che r ed s sono tangenti ad S.
2. Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio Φ di coniche di equazione
$$(1+h)x^2 - 2xy + (1+h)y^2 - h - 1 = 0$$
determinandone, in particolare, i punti base e le coniche spezzate. Studiale la conica Γ luogo dei centri di simmetria delle coniche di Φ.
3. Studiare, al variare del parametro reale h, le quadriche di equazione
$$2x^2 + y^2 + 2hyz + z^2 - 2hx - 1 = 0$$

SVOLGIMENTO

I

1. Si ricava facilmente la matrice associata ad f rispetto alla base canonica
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -h & 1+h & 1 \\ h & -h & 2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |M(f)| = 2h.$$
Quindi se $h \neq 0$ f è un isomorfismo. Per $h = 0$ si ha $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,1,0),(0,0,1))$ e $\operatorname{Ker} f = \{(x,0,0)\}$.
2. Da $V = \{(x,x,z)\}$ si ricava la base di V, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,0,1)$. Naturalmente $f(V) = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2)) = \mathscr{L}((1,1,0),(1,1,2))$. Siccome $f(v_1) \in V$ e $f(v_2) \in V$, $f(V) \subseteq V$; siccome inoltre $f(V)$ ha dimensione 2, i due sottospazi coincidono, $V = f(V)$.

3. Nel caso $h \neq 0$ dobbiamo risolvere il sistema lineare associato alla matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -h & 1+h & 1 & 0 \\ h & -h & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 \\ h & -h-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -h & h & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

per cui $f^{-1}(0,0,1) = \{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Nel caso $h = 0$ si ha $f^{-1}(0,0,1) = \{(x, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

4. Abbiamo visto che $f(1,1,0) = (1,1,0)$, cioè che f ha l'autovalore $T = 1$. Quindi possiamo effettuare il calcolo esplicito del polinomio caratteristico e scomporlo con Ruffini.

$$P(T) = T^3 + (-h-3)T^2 + (3h+2)T - 2h; \quad P(1) = 0 \Rightarrow T = 1$$

e si ricava facilmente $P(T) = (T-1)(T-2)(T-h)$. Se $h \neq 1, 2$ gli autovalori sono distinti, quindi f è semplice. In questo caso calcoliamo gli autospazi

$T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \{(x, x, 0)\}$ con base $u_1 = (1,1,0)$;

$T = 2$. Si trova $V_2 = \{(x, x, x)\}$ con base $u_2 = (1,1,1)$;

$T = h$. Si trova $V_h = \{(2\rho, (3h-h^2)\rho, (h^2-h)\rho)\}$ con base $u_3 = (2, 3h-h^2, h^2-h)$.

Se $h = 1$ si ha l'autovalore $T = 1$ doppio; siccome V_1 ha dimensione 1, f non è semplice. Infine se $h = 2$ si ha l'autovalore $T = 2$ doppio; siccome V_2 ha dimensione 1, f non è semplice.

II

1. Nel fascio $\varphi_r : \lambda(x-y) + \mu z = 0$ di piani contenete la retta r cerchiamo il piano π parallelo ad s imponendo il passaggio per il punto improprio $S_\infty \equiv (1, -1, 0, 0)$ di s. Si trova $\pi : z = 0$. Detto $S \equiv (\alpha, -\alpha, 1)$ il punto generico di s imponiamo alla retta passante per S ed ortogonale a π di intersecare r:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad u : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u \cap r = R \equiv (0,0,0) \\ u \cap s = S \equiv (0,0,1) \end{cases}$$

La sfera S ha centro nel punto medio di RS, $M \equiv (0, 0, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$, quindi ha equazione

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 .$$

Secando S con la retta r si trova l'origine contata due volte, secando con s si trova il punto $(0,0,1)$ contato due volte, quindi le due rette sono tangenti alla sfera.

2. Consideriamo la matrice associata alla generica conica di Φ

$$B = \begin{pmatrix} 1+h & -1 & 0 \\ -1 & 1+h & 0 \\ 0 & 0 & -h-1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} |B| = -h(h+1)(h+2) \\ \\ |A| = h(h+2) \end{array}$$

quindi le coniche spezzate di Φ sono:

- $h = 0$: $x^2 - 2xu + y^2 - 1 = 0, \quad (x-y-1)(x-y+1) = 0$
- $h = -1$: $xy = 0$
- $h = -2$: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0, \quad (x+y-1)(x+y+1) = 0$

e si trovano facilmente i punti base $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Per le coniche irriducibili si ha:

$|A| > 0$ $\; h < -2, h > 0$ ELLISSI. Per $h = \infty$ si ha la circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0$;

$|A| < 0$ $\; -2 < h < 0$ IPERBOLI. Non ci sono iperboli equilatere;

$|A| = 0 \;\; h = -2, 0$ spezzate. Non ci sono parabole.

Per trovare il luogo dei centri di simmetria bisogna eliminare il parametro dal sistema

$$\begin{cases} (1+h)x - y = 0 \\ x - (1+h)y = 0 \end{cases} \qquad 1 + h = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Osserviamo che si tratta della conica spezzata nelle due bisettrici.

3. Consideriamo la matrice associata alla quadrica

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ -h & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B| = -(1-h^2)(h^2+2) \\ \\ |A| = 2(1-h^2) \end{array}$$

Per $h = \pm 1$ si ottengono cilindri di vertici $(0, 1, \pm 1, 0)$. L'unico paraboloide (iperbolico) si ha per $h = \infty :\; yz - x = 0$. Per $h \neq \pm 1$ si hanno ellissoidi o iperboloidi. Il polinomio caratteristico di A è

$$T^3 - 4T^2 + (5 - h^2)T + 2h^2 - 2$$

quindi si ha:

- $-1 < h < 1$ ELLISSOIDI REALI, dato che $|B| < 0$, $|A| \neq 0$ e nel polinomio caratteristico sono tutte variazioni $(5 - h^2 > 0, 2h^2 - 2 < 0)$
- $h < -1$, $h > 1$ IPERBOLOIDI IPERBOLICI, perché $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$.