CdL in Ingegneria REA

Prova scritta di **Geometria**- 13 Settembre 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h, 2h+1, -1, h+10)\\ f(1,-1,0) &= (h, -h, 0, 0)\\ f(1,1,0) &= (h-6, h, -6, 6) \end{aligned}$$

1) Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche e studiare f, determinando in ciascun caso $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z = 0\}$, calcolare $f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) \in V\}$ al variare di h, specificandone la dimensione.
3) Detta $p\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $p(x,y,z,t) = (x,y,z)$, sia $g = p \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
4) Nel caso $h = -1$ mostrare che g è semplice e determinare una base di autovettori.

Soluzione

1) Da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h, 2h+1, -1, h+10)\\ f(1,-1,0) &= (h, -h, 0, 0)\\ f(1,1,0) &= (h-6, h, -6, 6) \end{aligned}$$

otteniamo:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (h, 2h+1, -1, h+10)\\ f(e_1) - f(e_2) = (h, -h, 0, 0)\\ f(e_1) + f(e_2) = (h-6, h, -6, 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (h-3, 0, -3, 3)\\ f(e_2) = (-3, h, -3, 3)\\ f(e_3) = (6, h+1, 5, h+4). \end{cases}$$

Quindi:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h-3 & -3 & 6\\ 0 & h & h+1\\ -3 & -3 & 5\\ 3 & 3 & h+4 \end{pmatrix}$$

e con operazioni di riduzione (dopo aver scambiato la seconda e la terza riga) otteniamo:

$$\begin{pmatrix} h-3 & -3 & 6\\ -h & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{8h+12}{3}\\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix}.$$

Risulta, dunque, evidente che la matrice ha rango 3 per $h \neq 0$. Quindi, per $h \neq 0$ $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(h-3,0,-3,3),(-3,h,-3,3),(6,h+1,5,h+4)]$. Inoltre, dal teorema delle dimensioni troviamo che $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 0$, cioè $\ker f = \{(0,0,0)\}$ e f è iniettiva.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(-3,0,-3,3),(6,1,5,4)]$. Inoltre, $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x-3y+6z = 0,\ z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

2) L'immagine del generico vettore di $\mathbb{R}^3$, ossia $f(x,y,z)$ al variare di $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si ottiene dal prodotto:

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-3 & -3 & 6 \\ 0 & h & h+1 \\ -3 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & h+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h-3)x-3y+6z \\ hy+(h+1)z \\ -3x-3y+5z \\ 3x+3y+(h+4)z \end{pmatrix},$$

cioè:

$$f(x,y,z) = ((h-3)x-3y+6z, hy+(h+1)z, -3x-3y+5z, 3x+3y+(h+4)z).$$

Osserviamo che $f(x,y,z) \in V$ se e solo se $((h-3)x-3y+6z, hy+(h+1)z, -3x-3y+5z, 3x+3y+(h+4)z)$ soddisfa l'equazione cartesiana di V:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid [(h-3)x-3y+6z] - [hy+(h+1)z] - (-3x-3y+5z) = 0\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid hx-hy-hz = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x-y-z) = 0\}. \end{aligned}$$

Quindi, se $h \neq 0$, abbiamo:

$$f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z = 0\},$$

e $\dim f^{-1}(V) = 2$, mentre per $h = 0$, abbiamo:

$$f^{-1}(V) = \mathbb{R}^3$$

e, ovviamente, $\dim f^{-1}(V) = 3$.

3) La matrice associata a p è:

$$M(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$M(g) = M(p) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h-3 & -3 & 6 \\ 0 & h & h+1 \\ -3 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & h+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-3 & -3 & 6 \\ 0 & h & h+1 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4) Per $h = -1$:

$$M(g) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -4-T & -3 & 6 \\ 0 & -1-T & 0 \\ -3 & -3 & 5-T \end{vmatrix} = (-1-T)^2(2-T).$$

Quindi, $m_{-1} = 2$ e $m_2 = 1$. Dato che necessariamente $\dim V_2 = 1 = m_2$, g è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Calcoliamo V_{-1}:

$$M(g) + I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\rho(M(g) + I) = 1$, allora $\dim V_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 - 1 = 2 = m_{-1}$. Quindi, possiamo dire che g è semplice e inoltre:

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x - 3y + 6z = 0\} = \{(-y + 2z, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((-1, 1, 0), (2, 0, 1)).$$

Calcoliamo V_2:

$$M(g) - 2I = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -6x - 3y - 6z = 0, -3y = 0\} = \{(x, 0, -x) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1, 0, -1)).$$

Dunque, una base di autovettori di g è $[(-1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 0, -1)]$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date la retta $r \colon x - y + 2 = y - z = 0$ e il piano $\pi \colon 2x - y = 0$, determinare la retta passante per il punto $(1, -1, -2)$, ortogonale a r e parallela a π.

2) Studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$x^2 + (h + 2)xy + y^2 - 1 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Verificare che le coniche irriducibili hanno tutte lo stesso centro di simmetria.

3) Detta Γ la conica del fascio ϕ passante per il punto $(-4, 1, 0)$, determinare il cilindro contenente Γ e avente come vertice il punto $V = (1, 0, 1, 0)$.

1) Dato che:

$$r \colon \begin{cases} x = y - 2 \\ z = y, \end{cases}$$

i parametri direttori di r sono $(1, 1, 1)$, mentre quelli del piano π sono $(2, -1, 0)$. Un vettore di componenti (l, m, n) parallelo alla retta cercata sarà tale da soddisfare le condizioni:

$$\begin{cases} l + m + n = 0 \\ 2l - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2l \\ n = -3l. \end{cases}$$

Quindi, come parametri direttori possiamo prendere $(1, 2, -3)$ e la retta cercata ha equazioni:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-3} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

2) Scrivendo l'equazione del fascio in questo modo:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 + h(xy) = 0,$$

osserviamo che una prima conica spezzata è quella nascosta e ha equazione $xy = 0$. La matrice associata al fascio è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+2}{2} & 0 \\ \frac{h+2}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e:

$$|B| = \frac{h^2 + 4h}{4}.$$

Quindi, le altre due coniche spezzate del fascio si hanno per $h = 0$ e $h = -4$. Per $h = 0$ abbiamo:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x + y + 1)(x + y - 1) = 0,$$

mentre per $h = -4$ abbiamo:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - y + 1)(x - y - 1) = 0.$$

Troviamo i punti base intersecando due coniche qualsiasi del fascio. In questo caso, scegliamo due coniche spezzate:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ (x + y + 1)(x + y - 1) = 0, \end{cases}$$

da cui troviamo i punti $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$. Adesso possiamo classificare le coniche del fascio:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h+2}{2} \\ \frac{h+2}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{h^2 + 4h}{4}.$$

Quindi, $|A| > 0$ per $-4 < h < 0$: in tal caso abbiamo delle ellissi e, in particolare, per $h = -2$ abbiamo una circonferenza. $|A| = 0$ per $h = 0$ e $h = -4$, ma in entrambi i casi abbiamo una conica spezzata. Quindi, non ci sono parabole nel fascio. $|A| < 0$ per $h < -4$ o $h > 0$. In questi casi abbiamo delle iperboli e, dal momento che $\mathrm{Tr}(A) = 2$, non ci sono iperboli equilatere nel fascio.

Per quel che riguarda il centro di simmetria delle coniche irriducibili, sappiamo che esso è individuato dal sistema associato alle prime due righe della matrice B, cioè:

$$\begin{cases} x + \frac{h+2}{2} y = 0 \\ \frac{h+2}{2} x + y = 0. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è la matrice A e $|A| \neq 0$ per le coniche irriducibili. Inoltre il sistema è omogeneo. Questo vuol dire che l'unica soluzione è $(0, 0)$, cioè l'origine è il centro di simmetria delle coniche irriducibili del fascio.

3) Troviamo Γ imponendo il passaggio per il punto:

$$16 - 4(h + 2) + 1 - 1 = 0 \Rightarrow h = 2.$$

Quindi:

$$\Gamma\colon x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0.$$

Sia $P = (\alpha, \beta, 0) \in \Gamma$. Allora sarà $\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$ e la retta PV ha equazioni:

$$\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = z \\ \alpha = x - z \\ \beta = y. \end{cases}$$

Sostituendo in $\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 - 1 = 0$ troviamo l'equazione del cilindro:

$$(x - z)^2 + 4(x - z)y + y^2 - 1 = 0.$$