CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCIV-Z)- Ingegneria Industriale (S-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Settembre 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,0,1)$ e sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio avente come base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$. Sia $f\colon V \to V$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla basa $\mathscr{A}$ è:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h-1 & -h-1 & h+1 \\ -2 & 0 & 2 \\ h-1 & -h+1 & h+1 \end{pmatrix}.$$

1) Studiare f al variare del parametro reale h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.
2) Dato $U = \mathscr{L}((1,0,1,1),(0,1,0,1)) \subset V$, calcolare $f(U)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, specificandone in ciascun caso la dimensione.
3) Trovare una base di autovettori di V per f indipendente dal parametro h.
4) Calcolare $f^{-1}(1,0,1,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
5) Determinare un prodotto scalare per il quale $\{(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ è un insieme ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione

1. Calcoliamo:

$$|M^{\mathscr{A}}(f)| = \begin{vmatrix} h-1 & -h-1 & h+1 \\ -2 & 0 & 2 \\ h-1 & -h+1 & h+1 \end{vmatrix} = -8h.$$

Quindi, per $h \neq 0$ vediamo che $|M^{\mathscr{A}}(f)| \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. Dunque, $\ker f = \{(0,0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = V$.

Sia $h = 0$. In tal caso

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $|M^{\mathscr{A}}(f)| = 0$, cioè $\rho(M^{\mathscr{A}}(f)) < 3$. Essendo questo minore non nullo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

concludiamo che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e che le prime due righe e le prime due colonne di $M^{\mathscr{A}}(f)$ sono linearmente indipendenti. In particolare, una base di $\operatorname{Im} f$ è data dalle prime due colonne della matrice:

$$[(-1,-2,-1)_{\mathscr{A}}, (-1,0,1)_{\mathscr{A}}] = [-v_1 - 2v_2 - v_3, -v_1 + v_3] = [(-1,-2,-1,-1),(-1,0,-1,1)].$$

Per quel che riguarda il nucleo:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a-b+c = 0,\ -2a+2c = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,0,a)\} = \mathscr{L}((1,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1+v_3) = \mathscr{L}((1,0,1,1)). \end{aligned}$$

2. Sappiamo che $f(U) = \mathscr{L}(f(1,0,1,1), f(0,1,0,1))$. Abbiamo appena visto che $(1,0,1,1) = v_1 + v_3$, cioè che $[(1,0,1,1)]_{\mathscr{A}} = (1,0,1)$. Dunque, possiamo trovare $[f(1,0,1,1)]_{\mathscr{A}}$:

$$\begin{pmatrix} h-1 & -h-1 & h+1 \\ -2 & 0 & 2 \\ h-1 & -h+1 & h+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $[f(1,0,1,1)]_{\mathscr{A}} = (2h, 0, 2h)$ e che $f(1,0,1,1) = (2h, 0, 2h, 2h) = 2h \cdot (1,0,1,1)$. In particolare, $2h$ è autovalore per f e $(1,0,1,1)$ è autovettore associato all'autovalore $2h$.

Si vede che $(0,1,0,1) = v_2 + v_3$, cioè che $[(0,1,0,1)]_{\mathscr{A}} = (0,1,1)$. Dunque, possiamo trovare $[f(0,1,0,1)]_{\mathscr{A}}$:

$$\begin{pmatrix} h-1 & -h-1 & h+1 \\ -2 & 0 & 2 \\ h-1 & -h+1 & h+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $[f(0,1,0,1)]_{\mathscr{A}} = (0,2,2)$ e che $f(0,1,0,1) = (0,2,0,2) = 2 \cdot (0,1,0,1)$. In particolare, anche 2 è autovalore per f e $(0,1,0,1)$ è autovettore associato all'autovalore 2.

Concludiamo, perciò, che $f(U) = \mathscr{L}((2h,0,2h,2h),(0,2,0,2)) = \mathscr{L}(2h \cdot (1,0,1,1), 2 \cdot (0,1,0,1))$. Quindi, per $h \neq 0$ $f(U) = \mathscr{L}((1,0,1,1),(0,1,0,1)) = U$ e $\dim f(U) = \dim U = 2$. Per $h = 0$ $f(U) = \mathscr{L}((0,1,0,1))$ e $\dim f(U) = 1$.

3. Abbiamo appena visto che $(1,0,1,1)$ e $(0,1,0,1)$ sono autovettori per f associati, rispettivamente agli autovalori $2h$ e 2. Per calcolare la semplicità di f possiamo, per esempio, prendere una base di V contenente questi due vettori. Scegliamo $\mathscr{B} = [(0,1,0,1),(1,0,1,1),(1,0,1,0)]$, dal momento che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 3. Vogliamo scrivere $M^{\mathscr{B}}(f)$. Dato che $f(0,1,0,1) = 2 \cdot (0,1,0,1)$, allora $[f(0,1,0,1)]_{\mathscr{B}} = (2,0,0)$, e, analogamente, essendo $f(1,0,1,1) = 2h \cdot (1,0,1,1)$, allora $[f(1,0,1,1)]_{\mathscr{B}} = (0,2h,0)$. Restano da calcolare $[f(1,0,1,0)]_{\mathscr{B}}$. Dato che $[f(1,0,1,0)]_{\mathscr{A}} = (h-1,-2,h-1)$, allora:

$$f(1,0,1,0) = (h-1)(1,0,1,0) - 2(0,1,0,0) + (h-1)(0,0,0,1) = (h-1,-2,h-1,h-1).$$

Vogliamo trovare $[(h-1,-2,h-1,h-1)]_{\mathscr{B}}$:

$$(h-1,-2,h-1,h-1) = a(0,1,0,1) + b(1,0,1,1) + c(1,0,1,0) = (b+c, a, b+c, a+b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c = h-1 \\ a = -2 \\ b+c = h-1 \\ a+b = h-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = h+1 \\ c = -2. \end{cases}$$

Quindi, $[f(1,0,1,0)]_{\mathscr{B}} = (-2, h+1, -2)$ e possiamo scrivere:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2h & h+1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 0 & -2 \\ 0 & 2h-T & h+1 \\ 0 & 0 & -2-T \end{vmatrix} = (2-T)(2h-T)(-2-T).$$

Gli autovalori sono 2, $2h$ e -2 e per $h \neq 1, -1$ i tre autovalori sono distinti. In particolare, per $h \neq 1, -1$ $\dim V_2 = \dim V_{2h} = \dim V_{-2} = 1$. Per quanto abbiamo già visto, concludiamo che per $h \neq 1, -1$ si ha $V_2 = \mathscr{L}((0,1,0,1))$ e $V_{2h} = \mathscr{L}((1,0,1,1))$. Rimane da calcolare V_{-2}:

$$M^{\mathscr{B}}(f) + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2h+2 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V_{-2} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c),\, 4a - 2c = 0,\, (2h+2)b + (h+1)c = 0\} = \\ = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a, -a, 2a)\} = \mathscr{L}((1,-1,2)_{\mathscr{B}}) = \\ = \mathscr{L}((0,1,0,1) - (1,0,1,1) + 2(1,0,1,0)) = \mathscr{L}((1,1,1,0)).\end{aligned}$$

Quindi, per $h \neq 1, -1$ una base di autovettori è $[(0,1,0,1), (1,0,1,1), (1,1,1,0)]$ e, dato che il parametro h non compare in nessuno di questi tre vettori, questa è una base di autovettori anche negli altri casi ed è la base cercata.

4. Dato che $f(1,0,1,1) = 2h \cdot (1,0,1,1)$, allora per $h \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{2h}, 0, \frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right) = (1,0,1,1).$$

Dato che per $h \neq 0$ f è un isomorfismo concludiamo che per $h \neq 0$:

$$f^{-1}(1,0,1,1) = \left\{\left(\frac{1}{2h}, 0, \frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right)\right\}.$$

Sia $h = 0$. Dato che $[(1,0,1,1)]_{\mathscr{A}} = (1,0,1)$, per calcolare la controimmagine dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice incompleta è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dato che la matrice incompleta ha rango 2, mentre quella completa ha rango 3, concludiamo che il sistema è impossibile e per $h = 0$ $f^{-1}(1,0,1,1) = \emptyset$.

5. Dato che $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_2$ e $v_3 = e_4$, scegliamo arbitrariamente la base $\mathcal{F} = [e_1, e_2, e_1 + e_3, e_4]$ come la base cercata. Dunque, stiamo dicendo che il prodotto scalare che vogliamo è tale che la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{F}$ è:

$$S_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Vogliamo calcolare la matrice associata a questo prodotto scalare rispetto alla base canonica, $S_{\mathcal{E}}$. Sappiamo che:

$$S_{\mathcal{E}} = {}^{t}P^{\mathcal{E},\mathcal{F}} S_{\mathcal{F}} P^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = {}^{t}P^{\mathcal{E},\mathcal{F}} I P^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = {}^{t}P^{\mathcal{E},\mathcal{F}} P^{\mathcal{E},\mathcal{F}}.$$

Dunque, dobbiamo calcolare $P^{\mathcal{E},\mathcal{F}}$. Dato che $\mathcal{E} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$ e che $\mathcal{F} = [e_1, e_2, e_1 + e_3, e_4]$, possiamo dire che $[e_1]_{\mathcal{F}} = (1,0,0,0)$, $[e_2]_{\mathcal{F}} = (0,1,0,0)$ e che $[e_4]_{\mathcal{F}} = (0,0,0,1)$. Restano da calcolare $[e_3]_{\mathcal{F}}$. Dal momento che $e_3 = -e_1 + (e_1 + e_3)$, allora $[e_3]_{\mathcal{F}} = (-1,0,1,0)$ e possiamo scrivere:

$$P^{\mathcal{E},\mathcal{F}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$S_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare il luogo delle rette passanti per $P = (1, 0, -1)$ e che formano con la retta

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

un angolo di $\frac{\pi}{6}$.

2) Determinare e studiare la conica Γ del piano $z = 0$ passante per i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-4, 0, 0)$ e tangente nell'origine alla retta $x + 2y = z = 0$. Determinare, in particolare, una forma canonica di Γ.

3) Determinare e studiare le quadriche contenenti le coniche:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 1 - y^2 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

1. Dato che:

$$r\colon \begin{cases} y = x - 1 \\ z = -x, \end{cases}$$

i parametri direttori di r sono $(1, 1, -1)$. Le rette cercate hanno equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = mt \\ z = -1 + nt. \end{cases}$$

Il vettore di componenti (l, m, n) e quello di componenti $(1, 1, -1)$ devono formare un angolo di $\frac{\pi}{6}$. Dunque, deve essere:

$$\pm \frac{l + m - n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elevando al quadrato otteniamo:

$$5l^2 + 5m^2 + 5n^2 - 8lm - 8mn - 8ln = 0.$$

Dalle equazioni delle retta ricaviamo:

$$\begin{cases} l = \dfrac{x-1}{t} \\ m = \dfrac{y}{t} \\ n = \dfrac{z+1}{t} \end{cases}.$$

Sostituendo troviamo l'equazione del luogo che stavamo cercando:

$$5(x-1)^2 + 5y^2 + 5(z+1)^2 - 8(x-1)y - 8y(z+1) - 8(x-1)(z+1) = 0.$$

2. Costruiamo il fascio di coniche tangenti in O alla retta $x+2y=0$ e passanti per A e B. La retta AB ha equazione $x=1$, la retta AO è $x+y=0$ e quella BO è $x-y=0$. Dunque, il fascio ha equazione:

$$\lambda(x-1)(x+2y)+\mu(x+y)(x-y)=0.$$

Imponiamo il passaggio per $C=(-4,0)$:

$$20\lambda+16\mu=0.$$

Quindi, prendiamo $\lambda=4$ e $\mu=-5$:

$$4(x-1)(x+2y)-5(x+y)(x-y)=0.$$

Quindi, l'equazione della conica Γ è:

$$x^2-5y^2-8xy+4x+8y=0.$$

La matrice associata alla conica è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $|B|=-60\neq 0$ e che $|A|=-21<0$. Inoltre, $\mathrm{Tr}(A)=-4\neq 0$. Quindi, Γ è un'iperbole non equilatera. Cerchiamo una sua equazione canonica, che sarà del tipo $\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$, dove α e β sono autovalori di A e $-\alpha\beta\gamma=|B|$. Cerchiamo gli autovalori di A:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 1-T & -4 \\ -4 & -5-T \end{vmatrix}=T^2+4T-21=(T-3)(T+7).$$

Quindi, possiamo prendere $\alpha=-7$ e $\beta=3$. Inoltre, sarà:

$$\gamma=-\frac{|B|}{\alpha\beta}=-\frac{20}{7}.$$

Quindi, una forma canonica di Γ è:

$$-7X^2+3Y^2=-\frac{20}{7}.$$

3. Le quadriche contenenti la conica di equazioni $x^2-y^2+1=z=0$ hanno equazione:

$$x^2-y^2+1+z(ax+by+cz+d)=0.$$

Imponiamo che contengano anche la seconda conica di equazioni $1-y^2=x=0$. Per fare questo dobbiamo intersecare la quadrica con il piano $x=0$:

$$\begin{cases} x^2-y^2+1+z(ax+by+cz+d)=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2+1+z(by+cz+d)=0 \\ x=0. \end{cases}$$

Risulta evidente che, affinché questa conica sia quella di equazioni $1-y^2=x=0$ devono essere $b=c=d=0$. Quindi, le quadriche cercate sono quelle di equazione:

$$x^2-y^2+axz+1=0.$$

Studiamo queste quadriche al variare di $a\in\mathbb{R}$:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B| = \frac{a^2}{4} > 0$ per ogni $a \neq 0$ e $|B| = 0$ per $a = 0$. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}.$$

Per $a \neq 0$ abbiamo che $|A| \neq 0$. Quindi, per $a \neq 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici. Per $a = 0$, $|B| = |A| = 0$ e, in tal caso, abbiamo un cilindro oppure una quadrica spezzata. Dal momento che per $a = 0$ abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è ridotta di rango 3, possiamo dire che abbiamo un cilindro. Inoltre questo cilindro è iperbolico, perché contiene la conica $x^2 - y^2 + 1 = z = 0$ che è un'iperbole.