CdL in Ingegneria Informatica - Ingegneria Elettronica (SCIV-Z)- Ingegneria Industriale (S-Z) - Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Luglio 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ h & 1 & 1-2h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

1) Studiare f al variare del parametro reale h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.

2) Data la base $\mathscr{A} = [(1,-1,1),(0,1,0),(0,1,-1)]$ di $\mathbb{R}^3$, determinare $M^{\mathscr{A}}(f)$. Studiare la semplicità di f.

3) Calcolare $f^{-1}(1,1,2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (1,1,2)\}$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Nel caso $h = -1$ calcolare una matrice associata all'applicazione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

5) Calcolare $(\operatorname{Im} f)^{\perp}$, rispetto al prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) Dal momento che $|M(f)| = 2h(h-1)$, per $h \neq 0, 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\ker f = \{(0,0,0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
Sia $h = 0$. In questo caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e, dato che gli elementi speciali della matrice ridotta sono nella prima e nella terza colonna, una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(0,0,1),(1,1,0)]$. Inoltre, $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z = x+y = 0\} = \{(x,-x,x) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,-1,1)).$$

Sia $h = 1$. In questo caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e, dato che gli elementi speciali della matrice ridotta sono nella prima e nella terza colonna, una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,1,1),(1,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 2x+2y = 0\} = \{(x,-x,0) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

2) Le colonne di $M^{\mathscr{A}}(f)$ sono le componenti $[f(1,-1,1)]_{\mathscr{A}}$, $[f(0,1,0)]_{\mathscr{A}}$ e $[f(0,1,-1)]_{\mathscr{A}}$. Da:

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ h & 1 & 1-2h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -h \\ h \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ h & 1 & 1-2h \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ 1-h \end{pmatrix}$$

vediamo che $f(1,-1,1) = (h,-h,h)$ e $f(0,1,-1) = (0,2h,1-h)$. Inoltre, sappiamo che $f(0,1,0) = (1,1,1)$. Calcoliamo le componenti $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}}$:

$$(x,y,z) = a(1,-1,1) + b(0,1,0) + c(0,1,-1) = (a, -a+b+c, a-c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x \\ -a+b+c = y \\ a-c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y+z \\ c = x-z. \end{cases}$$

Quindi, $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (x, y+z, x-z)$ e:

$$\begin{aligned} [f(1,-1,1)]_{\mathscr{A}} &= [(h,-h,h)]_{\mathscr{A}} = (h,0,0) \\ [f(0,1,0)]_{\mathscr{A}} &= [(1,1,1)]_{\mathscr{A}} = (1,2,0) \\ [f(0,1,-1)]_{\mathscr{A}} &= [(0,2h,1-h)]_{\mathscr{A}} = (0,h+1,h-1). \end{aligned}$$

Questo significa che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 2 & h+1 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Studiamo la semplicità di f prendendo $M^{\mathscr{A}}(f)$:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 0 \\ 0 & 2-T & h+1 \\ 0 & 0 & h-1-T \end{vmatrix} = (h-T)(2-T)(h-1-T).$$

Quindi, gli autovalori sono $2, h, h-1$ e sono distinti tra loro per $h \neq 2, 3$. Quindi, per $h \neq 2, 3$ hanno tutti molteplicità algebrica 1 e possiamo dire che f è semplice per $h \neq 2, 3$.

Sia $h = 2$. In tal caso, gli autovalori sono 2 con $m_2 = 2$ e 1 con $m_1 = 1$. Dato che certamente $\dim V_1 = m_1 = 1$, f sarà semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\rho(M^{\mathscr{A}}(f) - 2I) = 2$ e $\dim V_2 = 3 - 2 = 1 < m_2 = 2$. Questo significa che per $h = 2$ f non è semplice.

Sia $h = 3$. In tal caso, gli autovalori sono 2 con $m_2 = 2$ e 3 con $m_3 = 1$. Dato che certamente $\dim V_3 = m_3 = 1$, f sarà semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\rho(M^{\mathscr{A}}(f) - 2I) = 2$ e $\dim V_2 = 3 - 2 = 1 < m_2 = 2$. Questo significa che per $h = 3$ f non è semplice.

3) Per calcolare $f^{-1}(1,1,2)$ dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ h & 1 & 1-2h & 1 \\ 1 & 1 & h & 2 \end{array}\right).$$

Riducendo la matrice e scambiando le righe R_2 e R_3 otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 1 & 1 & 1 \\ 1-h & 0 & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & -2h & 0 \end{array}\right).$$

Quindi, per $h \neq 0,1$ il sistema è determinato (d'altro canto $|M(f)| \neq 0$ esattamente per $h \neq 0,1$) e troviamo $f^{-1}(1,1,2)$ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} hx + y + z = 1 \\ (1-h)x + (h-1)z = 1 \\ -2hz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{1-h} \\ y = \dfrac{1-2h}{1-h} \\ z = 0. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 0,1$ si ha:

$$f^{-1}(1,1,2) = \left\{ \left(\frac{1}{1-h}, \frac{1-2h}{1-h}, 0 \right) \right\}.$$

Per $h = 1$ la matrice ottenuta con la riduzione diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Dato che $\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A|B) = 3$, concludiamo che il sistema non ha soluzione e che, dunque, $f^{-1}(1,1,2) = \emptyset$ per $h = 1$.
Infine, per $h = 0$, la matrice ridotta diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In tal caso, dato che $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ e abbiamo 3 incognite, il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = -z + 1. \end{cases}$$

Dunque, per $h = 0$:

$$f^{-1}(1,1,2) = \{(z+1, -z+1, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

4) Sia $h = -1$. Allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|M(f)| = 4$, possiamo dire che f è invertibile e $M(f^{-1}) = (M(f))^{-1}$. Un semplice calcolo mostra che la matrice aggiunta è:

$$A_a = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$M(f^{-1}) = (M(f))^{-1} = \frac{1}{|M(f)|}{}^{\mathrm{T}}A_a = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Per $h \neq 0, 1$ sappiamo che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Quindi, per $h \neq 0, 1$ $(\operatorname{Im} f)^\perp = \{(0,0,0)\}$.
Sia $h = 0$. In tal caso, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,0,1),(1,1,1))$ e:

$$(\operatorname{Im} f)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\cdot(0,0,1) = 0, (x,y,z)\cdot(1,1,1) = 0\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x+y+z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

In particolare $\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = 1$.
Sia $h = 1$. In tal caso, $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,1,1),(1,-1,1))$ e:

$$(\operatorname{Im} f)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z)\cdot(1,1,1) = 0, (x,y,z)\cdot(1,-1,1) = 0\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0, x-y+z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

In particolare $\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = 1$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

il piano $\pi\colon x + 2y - z = 0$ e i punti $A = (1,2,0)$ e $B = (-1,-1,-2)$, determinare la retta s ortogonale a r, parallela a π e passante per A. Calcolare la distanza del punto B dalla retta s.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$x^2 - 2xy + (1-h)y^2 + 4x + h = 0,$$

determinandone, in particolare, le coniche spezzate e i punti base. Determinare il vertice della parabola appartenente al fascio.

3) Studiare il fascio di quadriche di equazione:

$$kx^2 + y^2 + 2kxz + 2x - 2y + 2 = 0,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Trovare il vertice del cilindro appartenente al fascio.

1) Dato che:

$$r\colon \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y, \end{cases}$$

i parametri direttori di r sono $(2,1,-1)$. Inoltre quelli di π sono $(1,2,-1)$. Quindi, se (l,m,n) sono i parametri direttori di s, deve essere:

$$\begin{cases} 2l + m - n = 0 \\ l + 2m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = m \\ n = 3m, \end{cases}$$

di modo che come parametri direttori di s possiamo prendere $(1,1,3)$. Dunque la retta s è:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow s\colon \begin{cases} x-y+1=0 \\ 3x-z-3=0. \end{cases}$$

Per calcolare la distanza di B da s dobbiamo trovare il piano α passante per B e ortogonale a s. Se $P = \alpha \cap s$, allora $d(B,s) = \overline{BP}$. Dato che i parametri direttori di s sono $(1,1,3)$ il piano α è:

$$\alpha\colon (x+1)+(y+1)+3(z+2)=0 \Rightarrow x+y+3z+8=0.$$

Troviamo il punto $P = \alpha \cap s$:

$$\begin{cases} x+y+3z+8=0 \\ x-y+1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=-3. \end{cases}$$

Quindi, $P=(0,1,-3)$ e $d(B,s) = \overline{BP} = \sqrt{6}$.

2) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1-h & 0 \\ 2 & 0 & h \end{pmatrix}$$

e $|B| = -(h-2)^2$. Dunque, una prima conica spezzata si trova per $h=2$ ed è $x^2-2xy-y^2+4x+2=0$. Dato che l'equazione del fascio si può scrivere nella forma:

$$x^2-2xy+y^2+4x+h(-y^2+1)=0,$$

l'altra conica spezzata del fascio è $(y+1)(y-1)=0$. Per trovare i punti base intersechiamo questa conica con una qualsiasi conica del fascio, per esempio quella che si trova per $h=0$:

$$\begin{cases} (y+1)(y-1)=0 \\ x^2-2xy+y^2+4x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x^2+6x+1=0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} y=1 \\ (x+1)^2=0. \end{cases}$$

Quindi, i punti base sono $(-3+2\sqrt{2},-1)$, $(-3-2\sqrt{2},-1)$ e il punto $(-1,1)$ contato due volte. Classifichiamo, ora, le coniche del fascio:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1-h \end{vmatrix} = -h.$$

Dunque, per $h<0$ si ha $|A|>0$ e abbiamo delle ellissi. Non ci sono circonferenze perché è sempre $a_{12} \neq 0$. Per $h=0$ sia ha $|A|=0$ e abbiamo una parabola. Per $h>0$, $h \neq 2$, si ha $|A|<0$ e abbiamo delle iperboli. Dal momento che $\mathrm{Tr}(A) = 2-h$ e che per $h=2$ abbiamo una conica spezzata, non ci sono iperboli equilatere.

La parabola del fascio si trova per $h=0$ ed ha equazione:

$$x^2-2xy+y^2+4x=0.$$

Troviamo il suo punto improprio:

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2+4xt=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Dunque, il punto improprio della parabola è $(1,1,0)$. In particolare, l'asse di simmetria ha $(1,1,0)$ come suo punto improprio e il suo coefficiente angolare è 1. Per trovare il vertice della parabola, intersechiamo la parabola con la retta ortogonale all'asse di simmetria che è tangente alla parabola in un suo punto, che è precisamente il vertice. Le rette ortogonali all'asse di simmetria hanno coefficiente angolare -1 e sono rette del tipo $y = -x + k$. Intersechiamo questa retta con la parabola:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 4x = 0 \\ y = -x + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + k \\ 4x^2 - (4k-4)x + k^2 = 0. \end{cases}$$

La retta è tangente se l'equazione $4x^2 - (4k-4)x + k^2 = 0$ ha due soluzioni reali e coincidenti, cioè se $\frac{\Delta}{4} = 0$, che vuol dire $-8k + 4 = 0$. Dunque, deve essere $k = \frac{1}{2}$, la retta tangente alla parabola nel vertice è $y = -x + \frac{1}{2}$ e troviamo il vertice risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -x + \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 + 2x + \dfrac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

Dunque, il vertice è il punto $V = (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

3) La matrice associata al fascio di quadriche è:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e $|B| = -k^2$. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{vmatrix} = -k^2.$$

Quindi, per $k = 0$ $|B| = |A| = 0$. Questo significa che abbiamo una quadrica degenere con la C_∞ spezzata, cioè abbiamo un cilindro o una quadrica spezzata. Vediamo il rango di B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(B) = 3$ e per $k = 0$ abbiamo un cilindro. Inoltre, il vertice del cilindro si trova risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice B:

$$\begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

cioè il vertice del cilindro è $V = (0, 1, 0, 0)$.

Sia $k \neq 0$. In tal caso, $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$. Quindi, abbiamo una quadrica non degenere a punti ellittici e con la C_∞ irriducibile, cioè abbiamo un iperboloide ellittico oppure un ellissoide. Per stabilirlo dobbiamo calcolare il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & k \\ 0 & 1-T & 0 \\ k & 0 & -T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - kT - k^2).$$

Un autovalore è 1 e, quindi, è positivo. Gli altri sono soluzioni dell'equazione $T^2 - kT - k^2 = 0$ e, per la regola dei segni di Cartesio, devono essere uno positivo e uno negativo. Ciò vuol dire che non abbiamo un ellissoide, quanto piuttosto un iperboloide ellittico.