CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 1 Febbraio 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, nucleo e immagine di f.
2) Dato $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0, y - z + t = 0\}$, calcolare $f(V)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, la dimensione.
3) Dato $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z + t = 0\}$, calcolare $f^{-1}(W) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z, t) \in W\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinandone, in particolare, la dimensione.
4) Studiare la semplicità di f per $k = -2$ e $k = -1$, determinando in ciascun caso, se possibile, una base di autovettori per f.

Soluzione

1. Calcoliamo $|M(f)|$ utilizzando il Primo Teorema di Laplace e applicandolo, per esempio, alla prima riga:
$$|M(f)| = \begin{vmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k^2-1).$$
Questo significa che per $k \neq -2, 1, -1$ $|M(f)| \neq 0$ e, quindi, f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\ker f = \{(0, 0, 0, 0)\}$.
Sia $k = -2$. Allora:
$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$
da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e che una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -2, 1), (0, 0, 1, -2)]$. Inoltre, $\dim \ker f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:
$$\ker f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x - y = 0,\ -2z + t = 0,\ -3z = 0\} = \{(x, -2x, 0, 0) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1, -2, 0, 0)).$$

Sia $k = 1$. Allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e che una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,2,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1)]$. Inoltre, $\dim \ker f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ 3x = 0,\ z + t = 0\} = \{(0,0,z,-z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((0,0,1,-1)).$$

Sia $k = -1$. Allora:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e che una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(-1,2,0,0),(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \ker f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x - y = 0,\ x = 0,\ -z + t = 0\} = \{(0,0,z,z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((0,0,1,1)).$$

2. Cerchiamo una base di V:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y - z,\ t = -y + z\} = \{(y-z,y,z,-y+z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,1,0,-1),(-1,0,1,1)).$$

Dunque:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,1,0,-1), f(-1,0,1,1)).$$

Calcoliamo $f(1,1,0,-1)$ e $f(-1,0,1,1)$:

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ 3 \\ -1 \\ -k \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ -2 \\ k+1 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $f(1,1,0,-1) = (k-1,3,-1,-k)$ e $f(-1,0,1,1) = (-k,-2,k+1,k+1)$, da cui:

$$f(V) = \mathscr{L}((k-1,3,-1,-k),(-k,-2,k+1,k+1)).$$

Per calcolare la dimensione di $f(V)$ mettiamo i due generatori in matrice e calcoliamone il rango:

$$\begin{pmatrix} k-1 & 3 & -1 & -k \\ -k & -2 & k+1 & k+1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} k-1 & 1 & -1 & -k \\ -\frac{1}{3}k - \frac{2}{3} & 0 & k + \frac{1}{3} & \frac{1}{3}k + 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2 per ogni valore di $k \in \mathbb{R}^4$, possiamo dire che $\dim f(V) = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}^4$.

3. Calcoliamo $f(x,y,z,t)$:

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx - y \\ 2x + y \\ kz + t \\ z + kt \end{pmatrix},$$

da cui $f(x,y,z,t) = (kx - y, 2x + y, kz + t, z + kt)$. Quindi:

$$f^{-1}(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (kz + t) + (z + kt) = 0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (k+1)z + (k+1)t = 0\}.$$

Dunque, se $k \neq -1$, allora $k+1 \neq 0$ e:

$$f^{-1}(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z+t=0\} = W$$

e $\dim f^{-1}(W) = 3$. Se $k=-1$, allora:

$$f^{-1}(W) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 0=0\} = \mathbb{R}^4$$

e, ovviamente, $\dim f^{-1}(W) = 4$.

4. Sia $k=-2$. In tal caso il polinomio caratteristico di f è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -2-T & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-T & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2-T \end{vmatrix} = T(T+1)^2(T+3).$$

Dunque, gli autovalori sono 0, -1 e -3 e $m_0 = m_{-3} = 1$ e $m_{-1} = 2$. Quindi, sappiamo che $\dim V_0 = 1 = m_0$ e che $\dim V_{-3} = 1 = m_{-3}$, mentre $\dim V_{-1}$ è pari a 1 o 2. Per vedere se f è semplice dobbiamo vedere se $\dim V_{-1} = 2 = m_{-1}$. Ricordiamo che V_{-1} è il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$M(f)+I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, vediamo che $\dim V_{-1} = 4-2 = 2 = m_{-1}$ e, quindi, possiamo concludere che per $k=-2$ f è semplice. Cerchiamo una base di V_{-1}:

$$V_{-1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x-y=0,\ -z+t=0\} = \{(x,-x,z,z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,-1,0,0),(0,0,1,1)).$$

Questo significa che una base di V_{-1} è $(1,-1,0,0), (0,0,1,1)$.

Per quel che riguarda l'autovalore 0, possiamo ricordare che $V_0 = \ker f = \mathscr{L}((1,-2,0,0))$. Infine, per $T=-3$ possiamo dire che V_{-3} è il nucleo dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice:

$$M(f)+3I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che:

$$V_{-3} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0,\ 6y=0,\ z+t=0\} = \{(0,0,z,-z) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((0,0,1,-1)).$$

Quindi, una base di autovettori per f è data da $(1,-1,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(1,-2,0,0)$ e $(0,0,1,-1)$.

Sia $k=-1$. In tal caso, il polinomio caratteristico di f è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -1-T & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-T & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1-T \end{vmatrix} = T(T+2)(T^2+1).$$

Quindi, le soluzioni del polinomio caratteristiche sono due reali e due immaginarie. Essendo f un endomorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, possiamo concludere che per $k=-1$ f non è semplice, perché non tutti gli autovalori appartengono a $\mathbb{R}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati i punti $P = (1,0,1)$ e $Q = (0,1,-1)$ e il piano $\alpha\colon x - y + z = 0$, determinare il piano π contenente P e Q e ortogonale ad α.

2) Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$x^2 + (h+3)y^2 + 2xy + 2hy + 1 = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Determinare il cilindro di vertice $V = (1,0,1,0)$ e contenente la conica di equazioni:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1. Il piano π è quel piano contenente la retta PQ che è ortogonale ad α. Un vettore parallelo alla retta PQ è $(1-0, 0-1, 1-(-1)) = (1,-1,2)$. Dunque la retta PQ ha equazioni:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Il piano π deve contenere la retta P e, quindi, è del tipo:

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(2y + z - 1) = 0 \Rightarrow \lambda x + (\lambda + 2\mu)y + \mu z - \lambda - \mu = 0.$$

Dato che π deve essere ortogonale a α devono essere ortogonali i vettori $(\lambda, \lambda + 2\mu, \mu)$ e $(1,-1,1)$. Quindi, deve essere:

$$\lambda - \lambda - 2\mu + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 0.$$

Questo significa che il piano cercato è $\pi\colon x + y - 1 = 0$.

2. La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & h+3 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

e vediamo che $|B| = -h^2 + h + 2$, così che $|B| = 0$ per $h = -1$ e $h = 2$. Quindi, per questi due valori otteniamo due coniche spezzate del fascio. Osserviamo, poi, che possiamo scrivere l'equazione del fascio in questo modo:

$$x^2 + 3y^2 + 2xy + 1 + h(y^2 + 2y) = 0.$$

Da questo vediamo che al fascio appartiene un'altra conica spezzata, di equazione $y^2 + 2y = 0$. Intersechiamo due di queste coniche spezzate per determinare i punti base del fascio:

$$\begin{cases} y(y+2) = 0 \\ x^2 + 5y^2 + 2xy + 4y + 1 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema vediamo che i punti base del fascio sono quattro punti distinti immaginari, a due a due coniugati e, precisamente, sono $A = (i,0)$, $B = (-i,0)$, $C = (2+3i,-2)$, $D = (2-3i,-2)$. Passiamo, adesso, alla classificazione delle coniche del fascio. Per fare questo calcoliamo $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & h+3 \end{vmatrix} = h + 2.$$

Quindi, per $h > -2$ e $h \neq 2, -1$ $|A| > 0$ e $|B| \neq 0$, cioè abbiamo un'ellisse. Notiamo che non ci sono circonferenze nel fascio. Per $h = -2$ $|A| = 0$ e $|B| \neq 0$, cioè abbiamo una parabola. Per $h < -2$ $|A| < 0$ e $|B| \neq 0$, cioè abbiamo delle iperboli. Notiamo che $\mathrm{Tr}(A) = h + 4$ e, quindi, per $h = -4$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3. Il generico punto $P \in \Gamma$ è un punto di coordinate $P = (\alpha, \beta, 0)$ tale che $\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta - 1 = 0$. Il cilindro che cerchiamo contiene tutte le rette PV, che hanno equazione:

$$\begin{cases} x = \alpha + t \\ y = \beta \\ z = t. \end{cases}$$

Per determinare l'equazione del cilindro occorre ricavare α e β nel seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta - 1 = 0 \\ x = \alpha + t \\ y = \beta \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - z \\ \beta = y \\ \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta - 1 = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo, sostituendo, l'equazione del cilindro:

$$(x - z)^2 - y^2 + 2(x - z)y - 1 = 0.$$