CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
- Ingegneria Edile-Architettura (M-Z)- Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 6 Luglio 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,0,0)$, sia $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ la base di $\mathbb{R}^3$ da essi individuata. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo avente come matrice associata rispetto alla base $\mathscr{A}$ la matrice:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare del parametro reale h, determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$, determinare $f(V)$ al variare di h, specificandone, in ciascun caso, la dimensione.

3) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Nel caso $h = 0$, calcolare una matrice associata all'endomorfismo $f^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Soluzione

1) Cominciamo notando che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = h^2 - 1$. Questo significa che per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, cioè $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

   Supponiamo che sia $h = 1$. In tal caso, vediamo che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dalla matrice ottenuta riducendo $M^{\mathscr{A}}(f)$ vediamo che gli elementi speciali si trovano nella prima e nella seconda colonna e, dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $f(v_1)$, $f(v_2)$. Osserviamo che:

$$[f(v_1)]_{\mathscr{A}} = (1,1,1) \Rightarrow f(v_1) = v_1 + v_2 + v_3 = (3,2,1)$$

   e che:

$$[f(v_2)]_{\mathscr{A}} = (-1,1,1) \Rightarrow f(v_2) = -v_1 + v_2 + v_3 = (1,0,-1).$$

   Dunque, una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(3,2,1),(1,0,-1)]$. Per quel che riguarda $\operatorname{Ker} f$ osserviamo che:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a-b+c = 2b = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,0,-a)\} =$$
$$= \mathscr{L}((1,0,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_3) = \mathscr{L}((0,1,1)).$$

Analogamente se $h = -1$, vediamo che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dalla matrice ottenuta riducendo $M^{\mathscr{A}}(f)$ vediamo che gli elementi speciali si trovano nella prima e nella seconda colonna e, dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $f(v_1)$, $f(v_2)$. Osserviamo che:

$$[f(v_1)]_{\mathscr{A}} = (1,1,1) \Rightarrow f(v_1) = v_1 + v_2 + v_3 = (3,2,1)$$

e che:

$$[f(v_2)]_{\mathscr{A}} = (-1,-1,1) \Rightarrow f(v_2) = -v_1 - v_2 + v_3 = (-1,-2,-1).$$

Dunque, una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(3,2,1),(-1,-2,-1)]$. Per quel che riguarda $\operatorname{Ker} f$ osserviamo che:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a-b+c = 2b-2c = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0,b,b)\} = \\ = \mathscr{L}((0,1,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_2+v_3) = \mathscr{L}((2,1,0)).\end{aligned}$$

2) Osserviamo che:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\} = \{(x,y,-x-y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

Sappiamo che:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,-1), f(0,1,-1)).$$

Per calcolare $f(1,0,-1)$ e $f(0,1,-1)$ abbiamo bisogno delle componenti di $(1,0,-1)$ e $(0,1,-1)$ rispetto alla base $\mathscr{A}$. Cerchiamo, dunque, le componenti del generico vettore (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathscr{A}$:

$$(x,y,z) = av_1 + bv_2 + cv_3 = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) = (a+b+c, a+b, a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = x \\ a+b = y \\ a = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = z \\ b = y-z \\ c = x-y. \end{cases}$$

Questo significa che $[(x,y,z)]_{\mathscr{A}} = (z, y-z, x-y)$. In particolare:

$$[(1,0,-1)]_{\mathscr{A}} = (-1,1,1)$$

e

$$[(0,1,-1)]_{\mathscr{A}} = (-1,2,-1).$$

Adesso possiamo calcolare $f(1,0,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ h \\ h \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $[f(1,0,-1)]_{\mathscr{A}} = (-1,h,h)$ e quindi:

$$f(v_1) = -v_1 + hv_2 + hv_3 = (2h-1, h-1, -1).$$

Nella stessa maniera possiamo calcolare $f(0,1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2h-2 \\ 1-h \end{pmatrix}.$$

Questo vuol dire che $[f(1,0,-1)]_{\mathscr{A}} = (-4, 2h-2, 1-h)$ e quindi:

$$f(v_1) = -4v_1 + (2h-2)v_2 + (1-h)v_3 = (h-5, 2h-6, -4).$$

Dunque, $f(V) = \mathscr{L}((2h-1, h-1, -1), (h-5, 2h-6, -4))$. Dato che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2h-1 & h-1 & -1 \\ h-5 & 2h-6 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2h-1 & h-1 & -1 \\ -7h-1 & -2h-2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni $h \in \mathbb{R}$, vediamo che $\dim f(V) = 2$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & 1 \\ 1 & h-T & 1 \\ 1 & 1 & h-T \end{vmatrix} = (1-T)(T-h-1)(T-h+1).$$

Gli autovalori sono 1, $h+1$ e $h-1$. Dato che per $h \neq 0, 2$ gli autovalori sono tutti distinti e di molteplicità algebrica 1, possiamo concludere che per $h \neq 0, 2$ f è semplice.

Se $h = 0$, gli autovalori sono 1 e -1 con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Quindi, f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Per calcolare $\dim V_1$ dobbiamo calcolare il rango della matrice $M^{\mathscr{A}}(f) - I$ per $h = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, vediamo che $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$ e, quindi, possiamo concludere che per $h = 0$ f non è semplice.

Se $h = 2$, gli autovalori sono 1 e 3 con $m_1 = 2$ e $m_3 = 1$. Quindi, f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Per calcolare $\dim V_1$ dobbiamo calcolare il rango della matrice $M^{\mathscr{A}}(f) - I$ per $h = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, vediamo che $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$ e, quindi, possiamo concludere che per $h = 2$ f non è semplice.

4) Per $h = 0$ sappiamo che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = -1 \neq 0$ e che f è un isomorfismo. Dunque, f è invertibile e:

$$M^{\mathscr{A}}(f^{-1}) = (M^{\mathscr{A}}(f))^{-1}.$$

Dunque, basta calcolare la matrice $(M^{\mathscr{A}}(f))^{-1}$, utilizzando la formula:

$$(M^{\mathscr{A}}(f))^{-1} = \frac{1}{|M^{\mathscr{A}}(f)|}(M^{\mathscr{A}}(f))_a^T,$$

dove $(M^{\mathscr{A}}(f))_a^T$ è la matrice trasposta della matrice aggiunta di $M^{\mathscr{A}}(f)$. Si vede facilmente che:

$$M^{\mathscr{A}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Data la retta:

$$r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+4z-4=0 \end{cases}$$

e dato il punto $P=(-1,3,0)$, determinare la retta ortogonale e incidente r e passante per P. Determinare la distanza di P da r.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ di equazione:

$$2x^2+(h-3)xy+y^2+(1-h)x-1=0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Determinare il paraboloide contenente la conica di equazioni:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

e passante per i punti $(0,1,1)$, $(0,0,1)$ e $(-1,0,1)$. Determinare la natura del paraboloide.

Soluzione

1) I parametri direttori della retta r sono le prime tre coordinate del punto improprio della retta, che viene determinato dal sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, 0 \right),$$

cioè i parametri direttori sono $(1,-2,-1)$. Sia π il piano passante per P e ortogonale alla retta r:

$$\pi\colon x+1-2(y-3)-z=0 \Rightarrow x-2y-z+7=0.$$

Sia $H=\pi\cap r$:

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y+4z=4 \\ x-2y-z=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=2, \end{cases}$$

da cui segue che $H=(-1,2,2)$. A questo punto, la retta cercata è la retta PH:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2+t \\ z=2-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y+z-6=0. \end{cases}$$

La distanza $d(P,r)$ è pari alla distanza $\overline{PH}$:

$$d(P,r)=\overline{PH}=\sqrt{5}.$$

2) La matrice associata al fascio di coniche è la matrice:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & \frac{h-3}{2} & \frac{1-h}{2} \\ \frac{h-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1-h}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e vediamo che $|B|=-h$. Questo vuol dire che una conica spezzata si ottiene per $h=0$. Osserviamo anche che l'equazione del fascio può essere scritta in questa maniera:

$$h(xy-x)+2x^2-3xy+y^2+x-1=0,$$

da cui vediamo che nel fascio abbiamo un'altra conica spezzata che ha equazione:

$$x(y-1)=0.$$

I punti base del fascio li troviamo intersecando due coniche qualsiasi del fascio, per esempio le due coniche spezzate:

$$\begin{cases} x(y-1)=0 \\ 2x^2-3xy+y^2+x-1=0, \end{cases}$$

da cui troviamo il punto $(0,1)$ contato due volte e i punti $(0,-1)$ e $(1,1)$, ognuno contato una volta. Osserviamo, ora, che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{h-3}{2} \\ \dfrac{h-3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{h^2-6h+1}{4}.$$

Quindi, per $3-2\sqrt{2} < h < 3+2\sqrt{2}$ abbiamo delle ellissi. Notiamo che non ci sono circonferenze nel fascio. Per $h = 3 \pm 2\sqrt{2}$ abbiamo delle parabole. Per $h < 3-2\sqrt{2}$, con $h \neq 0$, e per $h > 3+2\sqrt{2}$ abbiamo delle iperboli e notiamo che non vi sono iperboli equilatere nel fascio.

3) Consideriamo la generica quadrica contenente la conica assegnata:

$$x^2-xy+y^2-1+z(ax+by+cz+d)=0.$$

Imponendo a questa conica il passaggio per i 3 punti assegnati otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} b+c+d=0 \\ c+d=1 \\ -a+c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ d=1-c. \end{cases}$$

Dunque il paraboloide cercato apparterrà a questo fascio di quadriche:

$$x^2-xy+y^2+xz-yz+cz^2+(1-c)z-1=0.$$

La matrice associata a questo fascio è la seguente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c & \frac{1-c}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-c}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

e:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & c \end{vmatrix} = \frac{3c-1}{4}.$$

Quindi, il paraboloide cercato si ottiene per $c=\frac{1}{3}$ e ha equazione:

$$x^2-xy+y^2+xz-yz+\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{3}z-1=0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

e si vede che:

$$|B| = -\frac{1}{12} < 0.$$

Questo significa che il paraboloide è un paraboloide ellittico.