CdL in Ingegneria Edile-Architettura
- Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 27 Novembre 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & h \\ 1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare le applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che $M(f) = A$ e $M(g) = {}^tA$.
2) Studiare l'endomorfismo $\varphi = g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3) Verificare che φ è semplice per $h = -1$ e determinare una base di autovettori.
4) Studiare l'endomorfismo $\psi = f \circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
5) Verificare che ψ è semplice per $h = 1$ e determinare una base di autovettori.

Soluzione

1) Cominciamo col ridurre $M(f)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & h \\ 1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & h \\ 0 & h+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq -1$ $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(-1,1,0),(h,1,h+1)]$. Inoltre, $\dim \ker f = 2 - \dim \operatorname{Im} f = 0$ e, quindi, $\ker f = \{(0,0)\}$ e f è iniettiva.

Per $h = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 1$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-1,1,0))$. Inoltre, $\dim \ker f = 2 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e $\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \mathscr{L}((1,-1))$.

La matrice associata a g è:

$$M(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & 1 & h+1 \end{pmatrix} = {}^tA.$$

Dal momento che $\rho({}^tA) = \rho(A)$, possiamo dire che per $h \neq -1$ $\rho(M(g)) = 2$. Di conseguenza, $\dim \operatorname{Im} g = 2$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$, cioè g è suriettiva. Inoltre, $\dim \ker g = 3 - \dim \operatorname{Im} g = 1$ e:

$$\ker g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y = 0,\ hx + y + (h+1)z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)).$$

Per $h = -1$ $\rho(M(g)) = \rho({}^tA) = \rho(A) = \rho(M(f)) = 1$ e, dunque, $\dim \operatorname{Im} g = 1$ e $\operatorname{Im} g = \mathscr{L}((1,1))$. Inoltre, $\dim \ker g = 3 - \dim \operatorname{Im} g = 2$ e:

$$\ker g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y = 0\}.$$

2) La matrice associata a φ è:

$$M(\varphi) = M(g) \cdot M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & 1 & h+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & h \\ 1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-h \\ 1-h & 2h^2+2h+2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|M(\varphi)| = 3(h+1)^2$. Questo significa che per $h \neq -1$ φ è un isomorfismo, cioè φ è iniettiva e suriettiva.

Per $h = -1$:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} \varphi = \rho(M(\varphi)) = 1$ e $\operatorname{Im} \varphi = \mathscr{L}((1,1))$. Inoltre, $\dim \ker \varphi = 2 - \dim \operatorname{Im} \varphi = 1$ e:

$$\ker \varphi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 2y = 0\} = \mathscr{L}((1,-1)).$$

3) Sia $h = -1$. In tal caso:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 2 \\ 2 & 2-T \end{vmatrix} = T^2 - 4T = T(T-4).$$

Quindi, per $h = -1$ gli autovalori di φ sono 0 e 4 e φ è semplice. Calcoliamo, ora, una base di autovettori. Per $T = 0$ vediamo che $V_0 = \ker \varphi = \mathscr{L}((1,-1))$.

Sia $T = 4$. Allora:

$$M(\varphi) - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 2y = 0\} = \mathscr{L}((1,1))$. Quindi, una base di autovettori è $[(1,-1),(1,1)]$.

4) La matrice di ψ è:

$$M(\psi) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} -1 & h \\ 1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ h & 1 & h+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2+1 & h-1 & h^2+h \\ h-1 & 2 & h+1 \\ h^2+h & h+1 & h^2+2h+1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M(\psi)| = 0$, possiamo dire che $\rho(M(\psi)) \leq 2$ per ogni h. Calcoliamo il seguente minore di ordine 2 di $M(\psi)$:

$$\begin{vmatrix} h^2+1 & h-1 \\ h-1 & 2 \end{vmatrix} = (h+1)^2.$$

Quindi, per $h \neq -1$ $\dim \operatorname{Im} \psi = \rho(M(\psi)) = 2$ e $\operatorname{Im} \psi = \mathscr{L}((h^2+1, h-1, h^2+h), (h-1, 2, h+1))$. Inoltre , $\dim \ker \psi = 3 - \dim \operatorname{Im} \psi = 1$ e $\ker \psi$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} h^2+1 & h-1 & h^2+h \\ h-1 & 2 & h+1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{scambiando le due righe}} \begin{pmatrix} h-1 & 2 & h+1 \\ h^2+1 & h-1 & h^2+h \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}}$$

$$\begin{pmatrix} h-1 & 2 & h+1 \\ \dfrac{(h+1)^2}{2} & 0 & \dfrac{(h+1)^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \ker \psi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h-1)x + 2y + (h+z) = 0, \frac{(h+1)^2}{2}x + \frac{(h+1)^2}{2}z = 0\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (h-1)x + 2y + (h+z) = 0, x + z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,-1)). \end{aligned}$$

Se $h = -1$, allora:

$$M(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui vediamo che $\dim \operatorname{Im} \psi = \rho(M(\psi)) = 1$ e $\operatorname{Im} \psi = \mathscr{L}((2,-2,0)) = \mathscr{L}((1,-1,0))$. Inoltre $\dim \ker \psi = 3 - \dim \operatorname{Im} \psi = 2$ e:

$$\ker \psi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}.$$

5) Nel caso $h = 1$:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 0 & 2 \\ 0 & 2-T & 2 \\ 2 & 2 & 4-T \end{vmatrix} = T(2-T)(6-T).$$

Quindi, gli autovalori sono $0, 2, 6$ e ψ è semplice. Per $T = 0$, sappiamo che $V_0 = \ker \psi = \mathscr{L}((1,1,-1))$. Per $T = 2$:

$$M(\psi) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui segue che:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = 0, 2x + 2y + 2z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,0)).$$

Per $T = 6$:

$$M(\psi) - 6I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

da cui segue che:

$$V_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -4x + 2z = 0, -4y + 2z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,2)).$$

Dunque, una base di autovettori è $[(1,1,-1),(1,-1,0),(1,1,2)]$.

II

Studiare l'endomorfismo $g \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definito dalla legge:

$$g(a + bx + cx^2) = a + c + (a+b)x + (b-c)x^2$$

e verificare che è semplice. Verificare che $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g^2$.

Soluzione

Dalla legge che definisce g vediamo che:

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 + x \\ g(x) &= x + x^2 \\ g(x^2) &= 1 - x^2. \end{aligned}$$

Detta $\mathcal{E} = [1, x, x^2]$ la base standard di $\mathbb{R}_2[x]$, dal momento che $[1+x]_{\mathcal{E}} = (1,1,0)$, $[x+x^2]_{\mathcal{E}} = (0,1,1)$ e $[1-x^2]_{\mathcal{E}} = (1,0,-1)$, possiamo dire che:

$$M^{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $|M^{\mathcal{E}}(g)| = 0$. Riduciamo $M^{\mathcal{E}}(g)$:

$$M^{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} g = \rho(M^{\mathcal{E}}(g)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} g$ è data da $[1+x, 1-x^2]$. Inoltre, $\dim \ker g = 3 - \dim \operatorname{Im} g = 1$ e:

$$\ker g = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + c = 0, a + b = 0\} = \{a - ax - ax^2 \in \mathbb{R}_2[x]\} = \mathscr{L}(1 - x - x^2).$$

Studiamo la semplicità di g:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 \\ 1 & 1-T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{vmatrix} = -T(T^2 - T - 1).$$

Dal momento che g ha 3 autovalori distinti, che sono 0, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, possiamo dire che g è semplice. Facciamo vedere che $\ker g^2 = \ker g$. Dobbiamo, prima di tutto, calcolare $M(g^2)$:

$$M^{\mathcal{E}}(g^2) = M^{\mathcal{E}}(g) \cdot M^{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che:

$$\ker g^2 = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a + b = 0, a + c = 0\} = \ker g.$$

III

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono assegnati le rette:

$$r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ e } s : \begin{cases} z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

e il punto $P = (1, 1, 1)$.

1) Determinare la retta t passante per P e ortogonale a r e s e verificare che t è sghemba con r e s.
2) Determinare e studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (0, -1)$, $B = (-1, 0)$, $C = (0, 1)$ e tangenti in B alla retta $x = -1$.
3) Determinare l'unica parabola p del fascio ϕ e trovare il suo vertice, il suo fuoco, la sua direttrice e una sua equazione canonica.
4) Determinare l'equazione del cono che ha vertice in P e p per direttrice.

Soluzione

1) I parametri direttori della retta r sono $(0, 1, 1)$ e quelli di s sono $(1, -1, 0)$. Detti (l, m, n) i parametri direttori di t, le condizioni di ortogonalità di t con r e con s ci portano a questo sistema:

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ l - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = m \\ n = -m, \end{cases}$$

da cui segue che possiamo prendere come parametri direttori di t $(1, 1, -1)$. Dunque, la retta t ha equazioni:

$$x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Dal momento che t è ortogonale a r e s, per fare vedere che è sghemba rispetto a entrambe basta fare vedere che $t \cap r = \emptyset$ e $t \cap s = \emptyset$. L'intersezione $t \cap r$ è data dal sistema:

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ z = 2. \end{cases}$$

Dal momento che questo sistema non ha soluzioni, è evidente che t e r non hanno punti propri in comune e, essendo ortogonali, sono sghembe.

L'intersezione $t \cap s$ è data dal sistema:

$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y=0 \\ z=1 \\ x+y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \\ z=2 \end{cases}$$

che, non avendo soluzioni, ci dice che t e s non hanno punti propri in comune e, essendo ortogonali, sono sghembe.

2) Il fascio di coniche è generato dalla conica spezzata nell'unione della retta AC con $x=-1$ e dalla conica spezzata nell'unione delle rette AB e BC, cioè il fascio di coniche è generato dalle coniche $x(x+1)=0$ e da $(x+y+1)(x-y+1)=0$. Possiamo, quindi, scrivere l'equazione del fascio:

$$hx(x+1)+(x+y+1)(x-y+1)=0 \Rightarrow (h+1)x^2-y^2+(h+2)x+1=0.$$

La matrice associata al fascio è:

$$B=\begin{pmatrix} h+1 & 0 & \dfrac{h+2}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{h+2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $|A|=-h-1$. Dunque, per $h>-1$, $h\neq 0$, $|A|<0$ e abbiamo delle iperboli. Non ci sono iperboli equilatere, dal momento che $\mathrm{Tr}(A)=h$ e per $h=0$ abbiamo una conica spezzata. Per $h=-1$, $|A|=0$ e abbiamo una parabola. Per $h<-1$ $|A|>0$ e abbiamo delle ellissi. In particolare per $h=-2$ abbiamo una circonferenza.

3) La parabola p del fascio ha equazione:

$$-y^2+x+1=0,$$

da cui segue che il vertice della parabola è il punto $V=(-1,0)$, che il fuoco è il punto $F=(-\frac{3}{4},0)$ e che la direttrice è la retta $x=-\frac{5}{4}$.

Dal momento che questa parabola ha vertice in $(-1,0)$ e che ha come asse di simmetria l'asse $\vec{x}$, possiamo dire che il cambiamento di coordinate che ci fa ottenere la forma canonica è una semplice traslazione:

$$\begin{cases} x=X-1 \\ y=Y \end{cases}$$

da cui segue che una forma canonica è $-Y^2+X=0$.

4) Il generico punto della parabola p è il punto $Q=(\alpha,\beta,0)$ tale che $-\alpha^2+\beta+1=0$. La retta PQ ha equazione:

$$\frac{x-1}{\alpha-1}=\frac{y-1}{\beta-1}=\frac{z-1}{-1},$$

da cui ricaviamo che:

$$\begin{cases} \alpha=1-\dfrac{x-1}{z-1}=\dfrac{z-x}{z-1} \\ \beta=1-\dfrac{y-1}{z-1}=\dfrac{z-y}{z-1}. \end{cases}$$

Sostituendo in $-\alpha^2+\beta+1=0$, otteniamo:

$$-\left(\frac{z-x}{z-1}\right)^2+\frac{z-y}{z-1}+1=0,$$

da cui otteniamo l'equazione del luogo:

$$-(z-x)^2+(z-y)(z-1)+(z-1)^2=0.$$