CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
- Ingegneria delle Telecomunicazioni - Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 26 Gennaio 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo determinato dalla matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1-3k & -2k & -2k \\ 0 & 2 & 0 \\ 4k & 2k & 3k+1 \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ per ogni k.

2) Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$ e calcolare, in particolare, gli autospazi nel caso $k = -2$.

3) Posto $v = (1, 0, -1)$, calcolare $f^{-1}(v) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = v\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4) Dati $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, calcolare $f(U) + f(V)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, precisando se la somma risulti diretta o meno.

Soluzione

1) Cominciamo lo studio col calcolare il determinante di $M(f)$:

$$|M(f)| = 2(1-k^2).$$

Dunque, per $k \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, il che vuol dire che f è iniettiva e suriettiva, cioè $\ker f = \{(0, 0, 0)\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Sia, ora, $k = 1$. In tal caso vediamo che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta evidente che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e che una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(-2, 0, 4), (-2, 2, 2)$. In particolare possiamo dire che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((-1, 0, 2), (-1, 1, 1))$. L'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$ è data dal seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}.$$

Per quel che riguarda $\ker f$ sappiamo che le sue equazioni cartesiane si ricavano dalle righe della matrice ottenuta riducendo $M(f)$, cioè:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x-2y-2z=0,\ 2y=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0,\ y=0\} = \mathscr{L}((1,0,-1)).$$

Se $k=-1$, allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso vediamo che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e che una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(4,0,-4), (2,2,-2)$. In particolare $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,-1),(1,1,-1))$ e la sua equazione cartesiana si ricava da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z=0\}.$$

Per quel che riguarda il nucleo, anche in questo caso vediamo che si trova dalla matrice ottenuta riducendo $M(f)$, cioè:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x+2y+2z=0,\ 2y=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+z=0,\ y=0\} = \mathscr{L}((1,0,-2)).$$

2) Per lo studio della semplicità calcoliamo il polinomio caratteristico di f:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-3k-T & -2k & -2k \\ 0 & 2-T & 0 \\ 4k & 2k & 3k+1-T \end{vmatrix} = (2-T)[T^2-2T+1-k^2].$$

Gli autovalori sono, dunque, $2, 1+k$ e $1-k$. Per $k \neq 0, 1, -1$, vediamo che sono tutti distinti e, perciò, in questo caso f è semplice.

Supponiamo, ora, che sia $k=0$. In tal caso, abbiamo l'autovalore 2 con molteplicità algebrica $m_2 = 1$ e l'autovalore 1 con molteplicità algebrica $m_1 = 2$. Allora, possiamo subito dire che $\dim V_2 = m_2 = 1$, mentre $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. Dobbiamo vedere se $\dim V_1 = m_1 = 2$ e per farlo sostituiamo nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico i valori $k=0$ e $T=1$:

$$M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vediamo, dunque, che questa matrice ha rango 1 e perciò:

$$\dim V_1 = 3-1 = 2 = m_1.$$

Quindi, per $k=0$ f è semplice.

Per $k=1$ abbiamo l'autovalore 2 con $m_2 = 2$ e l'autovalore 0 con molteplictà $m_0 = 1$. Allora $\dim V_0 = 1$ e $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$. f è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sostituiamo nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico i valori $k=1$ e $T=2$:

$$M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, questa matrice ha rango 1 e $\dim V_2 = 3-1 = 2 = m_2$. Dunque, anche per $k=1$ f è semplice.

Sia, ora, $k = -1$. In tal caso abbiamo l'autovalore 2 con $m_2 = 2$ e l'autovalore 0 con molteplictà $m_0 = 1$. Allora $\dim V_0 = 1$ e $1 \leq \dim V_2 \leq 2 = m_2$. f è semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Sostituiamo nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico i valori $k = -1$ e $T = 2$:

$$M(f) - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, questa matrice ha rango 2 e $\dim V_2 = 3 - 2 = 1 < m_2$. Dunque, per $k = -1$ f non è semplice.

Adesso calcoliamogli autospazi per $k = -2$, caso in cui sappiamo che f è semplice e che gli autovalori sono 2, 3 e -1, tutti con molteplicità algebrica 1.

Per calcolare V_2 sostituiamo nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico i valori $k = -2$ e $T = 2$:

$$M(f) - 2I = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

da cui ricaviamo che:

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 4y + 4z = 0,\ -8x - 4y - 7z = 0\} = \mathscr{L}((4, -1, -4)).$$

Per calcolare V_3 sostituiamo nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico i valori $k = -2$ e $T = 3$:

$$M(f) - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix},$$

da cui ricaviamo che:

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 4y + 4z = 0,\ -y = 0\} = \mathscr{L}((1, 0, -1)).$$

Per calcolare V_{-1} sostituiamo nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico i valori $k = -2$ e $T = -1$:

$$M(f) + I = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix},$$

da cui ricaviamo che:

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 8x + 4y + 4z = 0,\ 3y = 0\} = \mathscr{L}((1, 0, -2)).$$

3) Per calcolare $f^{-1}(1, 0, -1)$ dobbiamo risolvere, al variare di k, il seguente sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3k & -2k & -2k & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4k & 2k & 3k+1 & -1 \end{array}\right),$$

tenendo presente che la matrice incompleta in questo caso è $M(f)$. Allora, dato che $|M(f)| = 2(k^2 - 1)$, possiamo subito dire che per $k \neq 1, -1$ questo sistema ammette una e una sola soluzione.

Calcoliamo questa soluzione utilizzando il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2k & -2k \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2k & 3k+1 \end{vmatrix}}{2(1-k^2)} = \frac{1}{1-k}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1-3k & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 0 \\ 4k & -1 & 3k+1 \end{vmatrix}}{2(1-k^2)} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1-3k & -2k & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4k & 2k & -1 \end{vmatrix}}{2(1-k^2)} = -\frac{1}{k+1}.$$

Dunque per $k \neq \pm 1$:

$$f^{-1}(1,0,-1) = \left\{ \left(\frac{1}{1-k}, 0, -\frac{1}{k+1} \right) \right\}.$$

Per $k = 1$, vediamo che $(1,0,-1) \notin \operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$, così che:

$$f^{-1}(1,0,-1) = \emptyset.$$

Per $k = -1$, il sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(1,0,-1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 2y + 2z = 1,\ 2y = 0\} = \{(x, 0, \frac{1}{2} - 2x) \in \mathbb{R}^3\}.$$

4) $U = \mathscr{L}((1,0,-2),(0,1,0))$ e quindi:

$$f(U) = \mathscr{L}(f(1,0,-2), f(0,1,0)).$$

Calcoliamo $f(1,0,-2)$:

$$\begin{pmatrix} 1-3k & -2k & -2k \\ 0 & 2 & 0 \\ 4k & 2k & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k \\ 0 \\ -2-2k. \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$f(U) = \mathscr{L}((1+k, 0, -2k-2), (-2k, 2, 2k)).$$

Mettendo i due vettori in matrice:

$$\begin{pmatrix} -2k & 2 & 2k \\ 1+k & 0 & -2-2k \end{pmatrix}$$

vediamo che $\dim f(U) = 2$ per $k \neq -1$, mentre $\dim f(U) = 1$ per $k = -1$.
Per quel che riguarda V, possiamo dire che:

$$V = \mathscr{L}((1,1,0),(0,1,1)) \Rightarrow f(V) = \mathscr{L}((f(1,1,0), f(0,1,1)).$$

Calcoliamo $f(1,1,0)$ e $f(0,1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1-3k & -2k & -2k \\ 0 & 2 & 0 \\ 4k & 2k & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5k \\ 2 \\ 6k \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} 1-3k & -2k & -2k \\ 0 & 2 & 0 \\ 4k & 2k & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k \\ 2 \\ 5k+1. \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$f(V) = \mathscr{L}((1-5k, 2, 6k), (-4k, 2, 5k+1)).$$

Dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1-5k & 2 & 6k \\ -4k & 2 & 5k+1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1-5k & 2 & 6k \\ k-1 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

deduciamo che $\dim f(V) = 2$ per $k \neq 1$ e $\dim f(V) = 1$ per $k = 1$.

Per quel che riguarda $f(U) + f(V)$ possiamo dire che:

$$f(U) + f(V) = \mathscr{L}((1+k, 0, -2k-2), (-k, 1, k), (1-5k, 2, 6k), (-4k, 2, 5k+1)).$$

In particolare, per $k \neq -1$:

$$f(U) + f(V) = \mathscr{L}((1, 0, -2), (-2k, 2, 2k), (1-5k, 2, 6k), (-4k, 2, 5k+1)).$$

Calcoliamo la dimensione di $f(U) + f(V)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -k & 1 & k \\ 1-5k & 2 & 6k \\ -4k & 2 & 5k+1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -2k+2 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $f(U) + f(V) = \mathbb{R}^3$ per $k \neq -1, 1$. Dalla formula di Grassmann troviamo che:

$$\dim(f(U) \cap f(V)) = \dim f(U) + \dim f(V) - \dim(f(U) + f(V)) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Questo vuol dire che per $k \neq 1, -1$ $f(U) \cap f(V) \neq \{(0, 0, 0)\}$, cioè la somma $f(U) + f(V)$ in questo caso non è diretta.

Per $k = 1$ dalla riduzione precedente vediamo che $\dim f(U) + f(V) = 2$ e che una sua base è data da $(1, 0, -2), (0, 1, -1)$. Ma $\dim f(U) = 2$ per $k = 1$ e $f(U) \subseteq f(U) + f(V)$: questo vuol dire che per $k = 1$ $f(U) = f(U) + f(V)$ e che $f(V) \subset f(U)$. In particolare, $f(U) \cap f(V) = f(V) \neq \{(0, 0, 0)\}$ e, perciò, anche nel caso $k = 1$ la somma $f(U) + f(V)$ non è diretta.

Per $k = -1$, vediamo che:

$$f(U) = \mathscr{L}((2, 2, -2)) = \mathscr{L}((1, 1, -1))$$

e:

$$f(V) = \mathscr{L}((6, 2, -6), (4, 2, -4)) = \mathscr{L}((3, 1, -3), (2, 1, -2)).$$

Quindi, per $k = -1$:

$$f(U) + f(V) = \mathscr{L}((1, 1, -1), (3, 1, -3), (2, 1, -2)).$$

Calcoliamone la dimensione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, deduciamo che $\dim f(U) + f(V) = 2$ per $k = -1$ e che una sua base è data da $(1, 1, -1), (2, 0, -2)$, ma, dal momento che $\dim f(V) = 2$ e che $f(V) \subseteq f(U) + f(V)$, otteniamo che $f(U) + f(V) = f(V)$ per $k = -1$. Inoltre:

$$f(U) \subset f(U) + f(V) = f(V) \Rightarrow f(U) \cap f(V) = f(U) \neq \{(0, 0, 0)\}.$$

In particolare, per $k = -1$ la somma $f(U) + f(V)$ non è diretta.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta r di equazioni:
$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$$
il piano $\alpha \colon x - z = 0$ e il punto $P = (1, 0, 3)$, determinare la retta s passante per P, parallela ad α e ortogonale a r. Verificare che r e s sono complanari e determinare un piano che le contiene.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$x^2 + hy^2 - 2xy + 2hy + 4 = 0,$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.

3) Studiare le quadriche di equazione:
$$x^2 + 2y^2 - kz^2 - 2yz + 4y - k = 0,$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) I parametri direttori della retta r sono dati dalla terna:
$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, 5, 3).$$
I parametri direttori della retta s sono (l, m, n) e le condizioni di parallelismo con il piano α e di ortogonalità con r portano al sistema:
$$\begin{cases} 2l + 5m + 3n = 0 \\ l - n = 0 \end{cases}$$
da cui segue che come parametri direttori di s possiamo prendere $(1, -1, 1)$. Dunque, la retta s è data da:
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$$
cioè:
$$s: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0. \end{cases}$$
Per verificare che r e s sono complanari facciamo l'intersezione:
$$r \cap s: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2, \end{cases}$$
cioè le due rette hanno in comune il punto $(0, 1, 2)$. Per trovare il piano che le contiene entrambe, cerchiamo il piano contenente r e passante per P. Il fascio di piani contenente r ha equazione:
$$\lambda(x - y + z - 1) + \mu(2x + y - 3z + 5) = 0$$
e imponiamo il passaggio per P:
$$3\lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}\mu.$$
Dunque, il piano cercato ha equazione:
$$8x + y - 7z + 13 = 0.$$

2) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & h & h \\ 0 & h & 4 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $|B| = -(h-2)^2$, così che una conica spezzata si ottiene per $h = 2$ e ha equazione:

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 4 = 0 \Rightarrow [x - (i+1)y - 2i][x + (i-1)y + 2i] = 0.$$

L'altra conica spezzata è quella "nascosta". Infatti, l'equazione del fascio si può scrivere nella forma:

$$x^2 - 2xy + 4 + h(y^2 + 2y) = 0,$$

da cui vediamo che l'altra conica spezzata ha equazione:

$$y(y+2) = 0.$$

I punti base del fascio vengono trovati mediante l'intersezione delle due coniche spezzate:

$$\begin{cases} [x - (i+1)y - 2i][x + (i-1)y + 2i] = 0 \\ y(y+2) = 0, \end{cases}$$

da cui troviamo che i punti base sono $(2i, 0)$, $(-2i, 0)$ e il punto $(-2, -2)$ contato due volte.

Passiamo alla classificazione delle coniche del fascio:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & h \end{vmatrix} = h - 1.$$

Da questo segue che per $h < 1$ abbiamo delle iperboli. In particolare, per $h = -1$ $\mathrm{Tr}(A) = 0$ e abbiamo un'iperbole equilatera. Per $h = 1$ abbiamo una parabola. Per $h > 1$, $h \neq 2$, abbiamo delle ellissi. Non ci cono circonferenze nel fascio.

3) La matrice associata al fascio di quadriche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

e $|B| = k(2k+5)$. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -k \end{vmatrix} = -2k - 1.$$

Dunque, per $k = 0$ e $k = -\frac{5}{2}$ $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, cioè la quadrica è un cono. Per $k = -\frac{1}{2}$, $|B| = -2 < 0$ e $|A| = 0$, cioè la quadrica è un paraboloide ellittico.

Negli altri casi dobbiamo guardare il segno degli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 2-T & -1 \\ 0 & -1 & -k-T \end{vmatrix} = -T^3 + (3-k)T^2 + (3k-1)T - 2k - 1.$$

Osserviamo che

$$\begin{cases} 3 - k > 0 \\ 3k - 1 < 0 \\ -2k - 1 > 0 \end{cases}$$

si verifica per $k < -\frac{1}{2}$ e che:

$$\begin{cases} 3-k<0 \\ 3k-1<0 \\ -2k-1<0 \end{cases}$$

non ha mai soluzioni. Quindi, per $k < -\frac{1}{2}$, $k \neq -\frac{5}{2}$, abbiamo un ellissoide e per $k > -\frac{1}{2}$, $k \neq 0$, abbiamo un iperboloide. In particolare, per $k < -\frac{5}{2}$ $|B| > 0$ e abbiamo un ellissoide immaginario e per $-\frac{5}{2} < k < -\frac{1}{2}$ $|B| < 0$ e abbiamo un ellissoide reale. Analogamente, per $-\frac{1}{2} < k < 0$ si ha $|B| < 0$ e abbiamo un iperboloide ellittico. Per $k > 0$ $|B| > 0$ e abbiamo un iperboloide iperbolico.