# CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
# - Ingegneria delle Telecomunicazioni - Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 22 Febbraio 2010

---

*Durata della prova: tre ore.*
*È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.*
*Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.*
*È vietato consultare libri o appunti.*

---

**I**

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (0,-1,0,2)$, $v_2 = (0,1,0,-1)$, $v_3 = (1,1,1,-1)$ e i sottospazi $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-t=0,\ z-y-t=0\}$.

1) Determinare $W \cap V$ e $W + V$.

2) Studiare l'applicazione lineare $f\colon V \to \mathbb{R}^4$ definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-h,-2,-h,2) \\ f(v_2) &= (1,2,1,-1) \\ f(v_3) &= (h+1,2,h+1,-1) \end{aligned}$$

dove $h$ è un parametro reale.

3) Verificare che $f$ induce un endomorfismo $f'\colon V \to V$ per ogni valore di $h$.

4) Trovare al variare di $h$ una base di autovettori di $f'$, quando esiste.

5) Determinare l'unico endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\varphi|_V = f$ e avente $W$ come autospazio.

*Soluzione*

1) Notiamo che $\dim V = 3$. Infatti i tre vettori $v_1$, $v_2$, $v_3$ sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che la matrice ha rango 3 possiamo dire che $\dim V = 3$. Per quel che riguarda $W$ possiamo dire che $W$ ha dimensione 2, in quanto è un sottospazio associato a un sistema lineare omogeneo con due incognite libere.

Calcoliamo ora $V \cap W$. Per farlo abbiamo bisogno delle loro equazioni cartesiane. Iniziamo da $V$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = -(x-z).$$

Questo significa che:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-z=0\}.$$

Per $V$ sappiamo che

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-t=0,\ z-y-t=0\}.$$

Dunque:

$$V \cap W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0,\ x + y - t = 0,\ z - y - t = 0\} = \mathscr{L}((1,0,1,1)).$$

Dunque, $\dim(V \cap W) = 1$ e dato che $\dim V = 3$ e che $\dim W = 2$ dalla formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Allora $V + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4, il che implica che $V + W = \mathbb{R}^4$.

2) Sia $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ una base di $V$ e sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Allora:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -h & 1 & h+1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -h & 1 & h+1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il rango di $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)$ utilizziamo un suo minore:

$$\begin{vmatrix} -h & 1 & h+1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2h.$$

Dunque, per $h \neq 0$, possiamo dire che $\rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 3$, cioè $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è costituita dai vettori $(-h, -2, -h, 2), (1, 2, 1, -1), (h+1, 2, h+1, -1)$. Da questo segue che:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 3 = 0,$$

cioè $\operatorname{Ker} f = \{0_V\} = \{(0,0,0,0)\}$ e $f$ è iniettiva.

Sia, ora, $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(f)) = 2$, cioè $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(0, -2, 0, 2), (1, 2, 1, -1)$, cioè anche da $(0, 1, 0, -1), (1, 2, 1, -1)$. Il nucleo sappiamo che si ricava dal sistema omogeneo associato alla matrice:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ b + c = 0, -2a = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a = 0, c = -b\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0, b, -b)\} = \\ &= \mathscr{L}((0,1,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_2 - v_3) = \mathscr{L}((-1,0,-1,0)) = \mathscr{L}((1,0,1,0)). \end{aligned}$$

3) Sia per $h \neq 0$ che per $h = 0$ vediamo che i vettori trovati della base di $\operatorname{Im} f$ verificano l'equazione cartesiana di $V$, cioè $\operatorname{Im} f \subseteq V$. Questo significa che $f$ induce un endomorfismo $f' \colon V \to V$.

4) Considerata la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di $V$, per scrivere la matrice $M^{\mathscr{A}}(f')$ ci servono le componenti di $f'(v_1), f'(v_2), f'(v_3)$ rispetto alla base $\mathscr{A}$, tenendo conto del fatto che $f'(v_1) = f(v_1)$, $f'(v_2) = f(v_2)$, $f'(v_3) = f(v_3)$. Calcoliamo, perciò, le componenti del generico vettore di $V$ rispetto alla base $\mathscr{A}$, dove $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0\} = \{(x,y,x,t) \in \mathbb{R}^4\}$:

$$\begin{aligned} (x,y,x,t) &= av_1 + bv_2 + cv_3 = \\ &= a(0,-1,0,2) + b(0,-1,0,1) + c(1,1,1,-1) = (c, -a-b+c, c, 2a+b-c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = x \\ -a - b + c = y \\ 2a + b - c = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + t \\ b = -x + 2y + t \\ c = x \end{cases} \Rightarrow [(x,y,x,t)]_{\mathscr{A}} = (y+t, -x+2y+t, x).$$

$$\begin{aligned}[f'(v_1)]_{\mathscr{A}} =&[f(v_1)]_{\mathscr{A}} = [(-h,-2,-h,2)]_{\mathscr{A}} = (0,h-2,-h)\\ [f'(v_2)]_{\mathscr{A}} =&[f(v_2)]_{\mathscr{A}} = [(1,2,1,-1)]_{\mathscr{A}} = (1,2,1)\\ [f'(v_3)]_{\mathscr{A}} =&[f(v_3)]_{\mathscr{A}} = [(h+1,2,h+1,-1)]_{\mathscr{A}} = (1,-h+2,h+1).\end{aligned}$$

Allora:

$$M^{\mathscr{A}}(f') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ h-2 & 2 & 2-h \\ -h & 1 & h+1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 1 \\ h-2 & 2-T & 2-h \\ -h & 1 & h+1-T \end{vmatrix} =$$
$$= -T^3+(h+3)T^2-(3h+2)T+2h = -(T-1)(T-2)(T-h).$$

Gli autovalori sono 1, 2 e $h$. Risulta chiaro che per $h \neq 1,2$ $f'$ è semplice, dato che i tre autovalori in tal caso sono tutti reali e distinti. Allora calcoliamo una base di autovettori per $h \neq 1,2$.

Per $T = 1$ abbiamo:

$$M(f)-I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ h-2 & 1 & 2-h \\ -h & 1 & h \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+b+c=0 \\ (1-h)b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a \\ b=0. \end{cases}$$

Questo significa che:

$$V_1 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,0,a)\} = \mathscr{L}((1,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1+v_3) = \mathscr{L}((1,0,1,1)).$$

Per $T = 2$ abbiamo:

$$M(f)-2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ h-2 & 0 & 2-h \\ -h & 1 & h-1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ h-2 & 0 & 2-h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a+b+c=0 \\ (h-2)a+(2-h)c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a \\ b=a. \end{cases}$$

Questo significa che:

$$V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,a,a)\} = \mathscr{L}((1,1,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1+v_2+v_3) = \mathscr{L}((1,1,1,0)).$$

Per $T = h$ abbiamo:

$$M(f)-hI = \begin{pmatrix} -h & 1 & 1 \\ h-2 & 2-h & 2-h \\ -h & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -h & 1 & 1 \\ (h-2)(1-h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -ha+b+c=0 \\ (h-2)(1-h)a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-b. \end{cases}$$

Questo vuol dire che:

$$V_h = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0,b,-b)\} = \mathscr{L}((0,1,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_2-v_3) = \mathscr{L}((-1,0,-1,0)) = \mathscr{L}((1,0,1,0)).$$

Dunque, per $h \neq 1,2$ una base di autovettori è data da $(1,0,1,1), (1,1,1,0), (1,0,1,0)$. Dato che questa base non dipende dal parametro $h$, essa sarà una base di autovettori anche per $h = 1$ e per $h = 2$.

5) Se $\varphi|_V = f$, allora sappiamo che:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) =&f(v_1) = (-h,-2,-h,2)\\ \varphi(v_2) =&f(v_2) = (1,2,1,-1)\\ \varphi(v_3) =&f(v_3) = (h+1,2,h+1,-1).\end{aligned}$$

Abbiamo visto che $V \cap W = \mathscr{L}((1,0,1,1))$ e da $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-t=0,\ z-y-t=0\}$ vediamo che $W = \mathscr{L}((1,0,1,1),(-1,1,1,0))$. Per quanto visto in precedenza su $f'$ $(1,0,1,1) \in V_1$, cioè:

$$f(1,0,1,1) = f'(1,0,1,1) = 1 \cdot (1,0,1,1) = (1,0,1,1).$$

Ma $(1,0,1,1) \in V$ e dunque, dato che $\varphi|_V = f$, deve essere:

$$\varphi(1,0,1,1) = f(1,0,1,1) = f'(1,0,1,1) = 1 \cdot (1,0,1,1) = (1,0,1,1).$$

Questo significa che se $W$ è un autospazio per $\varphi$, allora deve essere $W = V_1$, cioè in particolare:

$$\varphi(-1,1,1,0) = 1 \cdot (-1,1,1,0) = (-1,1,1,0).$$

Ma dal momento che $w = (-1,1,1,0) \notin V$, possiamo dire che $v_1, v_2, v_3, w$ sono 4 vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ e perciò formano una base di $\mathbb{R}^4$. In particolare, questo vuol dire che conosciamo le immagini dei vettori di una base di $\mathbb{R}^4$, cioè che $\varphi$ è definita da:

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1) &= f(v_1) = (-h,-2,-h,2)\\
\varphi(v_2) &= f(v_2) = (1,2,1,-1)\\
\varphi(v_3) &= f(v_3) = (h+1,2,h+1,-1)\\
\varphi(w) &= (-1,1,1,0).
\end{aligned}$$

**II**

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la retta passante per il punto $P = (1,0,0)$, parallela al piano $\alpha\colon x+y+z=0$ e incidente la retta $r$ di equazioni:

$$r : \begin{cases} x = z \\ y = 1-z. \end{cases}$$

Mostrare che la retta ottenuta giace sul piano $z = 0$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti agli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nei punti in cui essi secano la retta $s$ di equazioni:

$$s : \begin{cases} z = 0 \\ x+y-1 = 0. \end{cases}$$

3) Determinare vertice, asse di simmetria ed equazione canonica dell'unica parabola del fascio.

4) Determinare e studiare il fascio di quadriche contenenti la conica di equazioni:

$$\begin{cases} x+y-1 = 0 \\ (x-z)z = 0 \end{cases}$$

e tangenti al piano improprio nel punto improprio dell'asse $\vec{y}$.

*Soluzione*

1) La retta cercata giace nel piano $\pi_1$ parallelo ad $\alpha$ e passante per $P$ e nel piano $\pi_2$ contenente la retta $r$ e il punto $P$. Vediamo che:

$$\pi_1\colon 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-0) + 1\cdot(z-0) = 0 \Rightarrow x+y+z-1 = 0.$$

I piani che contengono $r$ hanno equazioni:

$$\lambda(x-z) + \mu(y+z-1) = 0.$$

Imponiamo il passaggio per $P = (1,0,0)$:

$$\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 1.$$

Questo significa che il piano $\pi_2$ ha equazione $x+y-1=0$ e che la retta cercata è:

$$\begin{cases} x+y+z-1 = 0 \\ x+y-1 = 0. \end{cases}$$

Per vedere che questa retta è contenuta nel piano $z=0$ basta fare la differenza tra le due equazioni e scrivere la stessa retta nella forma:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x+y-1 = 0. \end{cases}$$

2) Il fascio di coniche si può scrivere subito:

$$\lambda xy + \mu(x+y-1)^2 = 0.$$

Poniamo $\mu \neq 0$, in modo da escludere la conica spezzata $xy = 0$ e poniamo $h = \frac{\lambda}{\mu}$. Allora il nostro fascio ha equazione:

$$hxy + (x+y-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (h+2)xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h+2}{2} & -1 \\ \frac{h+2}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo, tuttavia, che non è necessario calcolare $|B|$, in quanto sappiamo già che le uniche coniche spezzate del fascio sono le due che abbiamo utilizzato per generarlo. I punti base sappiamo anche che sono dati dalle intersezioni:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x=0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y=0. \end{cases}$$

Dunque, i punti base sono $(1,0)$ e $(0,1)$, ciascuno dei due contato due volte. Passiamo, dunque, a calcolare $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h+2}{2} \\ \frac{h+2}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{h(h+4)}{4}.$$

Possiamo, perciò, dire che $|A| < 0$ per $h < -4$ e per $h > 0$, caso in cui abbiamo iperboli. Notiamo che non ci sono iperboli equilatere. $|A| = 0$ per $h = 0$, caso in cui abbiamo la conica spezzata $(x+y-1)^2 = 0$, e per $h = -4$, caso in cui abbiamo l'unica parabola del fascio. $|A| > 0$ per $-4 < h < 0$, caso in cui abbiamo ellissi. In particolare, per $h = -2$ abbiamo una circonferenza.

3) La parabola del fascio ha equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Il suo unico punto improprio si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 2xt - 2yt + t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Questo significa che il suo punto improprio ha coordinate omogenee $(1,1,0)$ e che l'asse di simmetria è parallelo alla retta $x - y = 0$. Dunque, le rette ortogonali all'asse di simmetria sono del tipo $x + y + k = 0$ e tra tutte queste rette quella tangente alla parabola lo sarà nel vertice. Cerchiamo, perciò, questa retta tangente.

$$\begin{cases} x+y+k=0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x-k \\ 4x^2 + 4kx + k^2 + 2k + 1 = 0. \end{cases}$$

Perché la retta $x + y + k = 0$ sia tangente alla parabola il $\frac{\Delta}{4}$ dell'equazione $4x^2 + 4kx + k^2 + 2k + 1 = 0$ deve essere nullo:

$$\frac{\Delta}{4} = -8k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Dunque, la retta tangente ha equazione $x + y - \frac{1}{2} = 0$ e il vertice si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Quindi, il vertice è il punto $V = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ e l'asse di simmetria è la retta parallela a $x - y = 0$ e passante per $V$, cioè è la retta $x - y = 0$.

Determiniamo ora una forma canonica della parabola. La sua matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vediamo che $|B| = -4$ e $\mathrm{Tr}(A) = 2$. Una forma canonica è del tipo $\beta Y^2 = 2\gamma X$ e le matrici associate sono:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dato che $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$ e che $|B'| = |B|$, vediamo che $\beta = 2$ e che $\gamma = \pm\sqrt{2}$. Dunque, una forma canonica della parabola è $2Y^2 = 2\sqrt{2}X$, cioè $Y^2 = \sqrt{2}X$.

4) Dato che le quadriche contengono la conica spezzata di equazioni:

$$\begin{cases} z(x - z) = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

esse avranno equazione:

$$(x + y - 1)(ax + by + cz + d) + z(x - z) = 0,$$

cioè:

$$ax^2 + by^2 - z^2 + (a + b)xy + (c + 1)xz + cyz + (d - a)x + (d - b)y - cz - d = 0.$$

Imponiamo che la quadrica contenga il punto improprio dell'asse $\vec{y}$, cioè $(0, 1, 0, 0)$:

$$b = 0.$$

Allora le quadriche hanno equazione:

$$ax^2 - z^2 + axy + (c + 1)xz + cyz + (d - a)x + dy - cz - d = 0$$

Cerchiamo, ora, il piano tangente alla quadrica nel punto $(0, 1, 0, 0)$ e imponiamo che sia il piano improprio $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{a}{2} & \frac{c+1}{2} & \frac{d-a}{2} \\ \frac{a}{2} & 0 & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c+1}{2} & \frac{c}{2} & -1 & -\frac{c}{2} \\ \frac{d-a}{2} & \frac{d}{2} & -\frac{c}{2} & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2}x + \frac{c}{2}z + \frac{d}{2}t = 0.$$

Questo piano è il piano improprio se $a = c = 0$ e se $d \neq 0$. Le nostre quadriche hanno, dunque, equazione:

$$-z^2 + xz + dx + dy - d = 0,$$

con $d \neq 0$. La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{d}{2} & \frac{d}{2} & 0 & -d \end{pmatrix}$$

e $|B| = \frac{d^2}{16} > 0$ (perché $d \neq 0$), mentre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questo vuol dire che queste quadriche sono tutte paraboloidi iperbolici.