CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
- Ingegneria Edile-Architettura (M-Z)- Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 21 Giugno 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x,y,z,t) = (hx + (h-1)y - t, hy - z, x + (h-1)y - t, -x + (h-1)y + ht)$$

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare del parametro reale h, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Dato $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0\}$, mostrare che la restrizione $f|_V$ di f a V induce un endomorfismo $\psi\colon V \to V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3) Studiare la semplicità di ψ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Nel caso $h = 1$, determinare un'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ non nulla tale che $g \circ f = 0$.

Soluzione

1. Dalla legge:

$$f(x,y,z,t) = (hx + (h-1)y - t, hy - z, x + (h-1)y - t, -x + (h-1)y + ht)$$

troviamo le immagini di tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$. In particolare:

$$\begin{aligned}
f(1,0,0,0) =&(h,0,1,-1)\\
f(0,1,0,0) =&(h-1,h,h-1,h-1)\\
f(0,0,1,0) =&(0,-1,0,0)\\
f(0,0,0,1) =&(-1,0,-1,h).
\end{aligned}$$

Dunque, la matrice associata a f è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & h-1 & 0 & -1 \\ 0 & h & -1 & 0 \\ 1 & h-1 & 0 & -1 \\ -1 & h-1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il Primo Teorema di Laplace vediamo che $|M(f)| = (h-1)^2(h+1)$. Questo vuol dire che per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva, il che vuol dire che $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$.

Se $h = 1$, vediamo che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vediamo, dunque, che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e che una sua base è data da $[(1,0,1,-1),(0,1,0,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = y - z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,1,0)).$$

Se $h = -1$, allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e una sua base è data da $[(-1,0,1,-1),(-2,-1,-2,-2),(0,-1,0,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x - 2y - t = -y - z = -4y - 2t = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1,-2)).$$

2. Si vede che:
$$V = \{(x,y,z,x) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)).$$
Per vedere se la restrizione di f a V induce un endomorfismo di V dobbiamo vedere se $f(V) \subseteq V$. Posti:
$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0,1) \\ v_2 &= (0,1,0,0) \\ v_3 &= (0,0,1,0) \end{aligned}$$
sappiamo che $f(V) = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2), f(v_3))$. Dunque, per vedere se $f(V) \subseteq V$ basta vedere se $f(v_1), f(v_2), f(v_3) \in V$. Dalla legge di f vediamo che:
$$f(v_1) = (h-1, 0, 0, h-1),$$
e dal momento che $(h-1,0,0,h-1)$ soddisfa l'equazione cartesiana di V vediamo che $f(v_1) \in V$. Abbiamo già visto che $f(v_2) = (h-1, h, h-1, h-1)$ e che $f(v_2) = (0,-1,0,0)$ ed entrambi verificano l'equazione cartesiana di V, cioè $f(v_2), f(v_3) \in V$. Dunque, concludiamo che $f(V) \subseteq V$ e che $f|_V$ induce un endomorfismo $\psi \colon V \to V$.

3. Sia $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$. Cerchiamo le componenti di $\psi(v_1) = f(v_1)$, $\psi(v_2) = f(v_2)$, $\psi(v_3) = f(v_3)$ rispetto alla base $\mathscr{A}$. Si vede facilmente che:
$$\psi(v_1) = (h-1)v_1 \text{ e che } \psi(v_3) = -v_2.$$
Calcoliamo le componenti di $\psi(v_2) = (h-1, h, h-1, h-1)$:
$$(h-1, h, h-1, h-1) = av_1 + bv_2 + cv_3 = (a,b,c,a) \Rightarrow \begin{cases} a = h-1 \\ b = h \\ c = h-1 \end{cases}$$
cioè $\psi(v_1) = (h-1)v_1 + hv_2 + (h-1)v_3$. Dunque:
$$M^{\mathscr{A}}(\psi) = \begin{pmatrix} h-1 & h-1 & 0 \\ 0 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 \end{pmatrix}$$
e il polinomio caratteristico è:
$$P(T) = \begin{vmatrix} h-1-T & h-1 & 0 \\ 0 & h-T & -1 \\ 0 & h-1 & -T \end{vmatrix} = (h-1-T)^2(1-T).$$

Dunque, per $h \neq 2$, gli autovalori sono $h-1$ e 1 e $m_{h-1} = 2$ e $m_1 = 1$, mentre per $h = 2$ si vede che 1 è l'unico autovalore e $m_1 = 3$.

Sia $h \neq 2$. Sappiamo che $\dim V_1 = 1 = m_1$ e che $1 \leq \dim V_{h-1} \leq 2$. ψ è semplice se $\dim V_{h-1} = 2$. V_{h-1} è il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & h-1 & 1-h \end{pmatrix}.$$

Scambiando le prime due righe e riducendo otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 per $h \neq 1$ e rango 1 per $h = 1$. Questo significa che per $h \neq 1, 2$ $\dim V_{h-1} = 1 < 2 = m_{h-1}$, mentre per $h = 1$ $\dim V_{h-1} = 2 = m_{h-1}$. Dunque, ψ è semplice per $h = 1$, mentre non lo è per $h \neq 1, 2$.

Per $h = 2$ l'unico autovalore è 1 con molteplicità 3. Allora ψ sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 3$. V_1 è il nucleo dell'endomorfismo associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa è una matrice ridotta per colonne e ha due colonne non nulle. Dunque, ha rango 2. Questo vuol dire che $\dim V_1 = 1 < 3 = m_1$. Quindi, per $h = 2$ ψ non è semplice.

4. Nel caso $h = 1$, abbiamo visto che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,1,-1),(0,1,0,0))$. Allora:

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \mathscr{L}(g(1,0,1,-1), g(0,1,0,0)).$$

Quindi, $g \circ f = 0$ se:

$$\begin{aligned} g(1,0,1,-1) &= (0,0) \\ g(0,1,0,0) &= (0,0). \end{aligned}$$

Completiamo l'insieme libero $(1,0,1,-1),(0,1,0,0)$ a una base e in questo modo otteniamo la base $\mathscr{B} = [(1,0,1,-1),(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,1,0)]$. Questi quattro vettori sono una base in quanto la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta di rango 4. Poniamo:

$$\begin{aligned} g(1,0,0,0) &= (0,0) \\ g(0,0,1,0) &= (0,1). \end{aligned}$$

Concludendo, una delle applicazioni lineari g non nulle tali che $g \circ f = 0$ è quella una cui matrice è:

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Data la retta:

$$r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

e dato il punto $P = (2, 1, -1)$, determinare il luogo delle rette che passano per P e formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

2) Determinare la parabola p del piano $z = 0$ avente la retta $s\colon x - y = z = 0$ come asse di simmetria e avente l'asse $\vec{x}$ tangente nel punto $A = (1, 0, 0)$. Determinare il vertice di p.

3) Studiare il fascio di quadriche di equazione:

$$x^2 - 2xy + 2hxz - 2yz + 2x + 2h + 1 = 0,$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare il vertice del cono appartenente al fascio.

Soluzione

1. I parametri direttori della retta r sono dati dalla terna:

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 3, 3).$$

Quindi, possiamo prendere $(0, 1, 1)$ come parametri direttori di r. La generica retta passante per P ha equazioni:

$$\begin{cases} x - 2 = m(z + 1) \\ y - 1 = n(z + 1). \end{cases}$$

Questa retta forma con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$ se:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm \frac{n + 1}{\sqrt{2}\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \Rightarrow m^2 = 2n.$$

Dalle equazioni della generica retta per P troviamo:

$$\begin{cases} m = \dfrac{x - 2}{z + 1} \\ n = \dfrac{y - 1}{z + 1} \end{cases}.$$

Sostituendo troviamo:

$$\frac{(x - 2)^2}{(z + 1)^2} = 2\frac{y - 1}{z + 1}.$$

Quindi, il luogo cercato ha equazione:

$$(x - 2)^2 = (y - 1)(z + 1).$$

2. La parabola passante per A e avente s come asse di simmetria passa anche per B, il simmetrico di A rispetto a s. Cerchiamo questo punto B. La retta s' passante per A e ortogonale a s è la retta:

$$s'\colon x + y - 1 = 0.$$

$s \cap s' = \{M\}$, dove M è il punto medio di A e B:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi, $M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $B = (x, y)$ è tale che:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi, $B = (0,1)$. Questo significa che la parabola ha s come asse di simmetria, l'asse $\vec{x}$ tangente in A e passa per B. Dato che il punto improprio di s è $(1,1,0)$ e dato che la parabola è tangente alla retta impropria nel suo punto improprio, costruiamo il fascio di coniche tangenti alla retta impropria nel punto $(1,1,0)$ e all'asse $\vec{x}$ nel punto $A = (1,0)$:

$$\lambda(x-y-t)^2 + \mu yt = 0.$$

In coordinate cartesiane:

$$\lambda(x-y-1)^2 + \mu y = 0.$$

Imponiamo il passaggio per $B = (0,1)$:

$$4\lambda + \mu = 0,$$

da cui troviamo che la parabola ha equazione:

$$(x-y-1)^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Per trovare il vertice è sufficiente intersecare l'asse di simmetria con la parabola p:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

da cui troviamo che il vertice è il punto $V = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

3. La matrice associata alla generica quadrica del fascio è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ h & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2h+1 \end{pmatrix}$$

e $|B| = 4h^2$. Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & h \\ -1 & 0 & -1 \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2h - 1.$$

Da questo deduciamo che, se $h = 0$, $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, cioè abbiamo un cono; se $h = \frac{1}{2}$, $|B| > 0$ e $|A| = 0$, cioè abbiamo un paraboloide iperbolico; se $h \neq 0, \frac{1}{2}$, allora $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$, cioè abbiamo un iperboloide iperbolico o un ellissoide immaginario. Per vedere quale caso abbiamo dobbiamo calcolare il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -1 & h \\ -1 & -T & -1 \\ h & -1 & -T \end{vmatrix} = -T^3 + T^2 + 2T + 2h - 1.$$

Dato che $-1 < 0, 1 > 0$ e $2 > 0$ possiamo dire che per $h \neq 0, \frac{1}{2}$ abbiamo un iperboloide iperbolico.

Cerchiamo, ora, il vertice del cono del fascio. Il cono in questione ha equazione:

$$x^2 - 2xy - 2yz + 2x + 1 = 0$$

e il vertice si trova risolvendo il sistema associato alla matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, il vertice è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1, \end{cases}$$

cioè il vertice è il punto $V = (-1, 0, 1)$.