CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
- Ingegneria Edile-Architettura (M-Z)- Ingegneria delle Telecomunicazioni -
- Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 16 Aprile 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ -2 & 2-2h & h+1 \\ 1 & 2h & -1 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix}$$

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare del parametro reale h, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Dati i vettori $v_1 = (h,0,0,0)$, $v_2 = (1, h-1, 0, h-1)$ e $v_3 = (2,0,h,h)$ e $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, dire in quali casi $V = \operatorname{Im} f$.

3) Detto $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$, calcolare $f(W)$ al variare di h.

4) Detta $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$g(x,y,z,t) = (2x+2y+z-2t, 2x+y, 2x+y),$$

studiare la semplicità al variare di h di $g \circ f$.

Soluzione

1) Cominciamo lo studio di f riducendo per righe la matrice associata $M(f)$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ -2 & 2-2h & h+1 \\ 1 & 2h & -1 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ 0 & 2 & h-1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che questa è una matrice ridotta di rango 3 nel caso $h \neq 0,1$, il che vuol dire che per $h \neq 0,1$ $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è $[(1,-2,1,-1), (h, 2-2h, 2h, 2), (-1, h+1, -1, h)]$. In tal caso, inoltre:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 3 = 0,$$

cioè $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Se $h = 1$, la riduzione di $M(f)$ diventa:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(1,-2,1,-1),(1,0,2,2)]$. Per quel che riguarda il $\operatorname{Ker} f$ abbiamo:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$$

e

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0,\ 2y = 0\} = \{(x,0,x) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((1,0,1)).$$

Se $h = 0$, la riduzione di $M(f)$ diventa:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,-2,1,-1),(0,2,0,2)]$. Per quel che riguarda il $\operatorname{Ker} f$ abbiamo:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$$

e

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0,\ 2y - z = 0\} = \{(2y,y,2y) \in \mathbb{R}^3\} = \mathscr{L}((2,1,2)).$$

2) Notiamo che:

$$v_1 = (h,0,0,0) = h \cdot (1,0,0,0).$$

Dunque, per $h \neq 0$, possiamo dire che:

$$V = \mathscr{L}((h,0,0,0),(1,h-1,0,h-1),(2,0,h,h)) = \mathscr{L}((1,0,0,0),(1,h-1,0,h-1),(2,0,h,h)).$$

Vediamo adesso di stabilire, nel caso $h \neq 0$, la dimensione di V. Per fare questo disponiamo i 3 generatori in una matrice e procediamo con la riduzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h-1 & 0 & h-1 \\ 2 & 0 & h & h \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & h & h \end{pmatrix}.$$

Risulta chiaro che per $h \neq 0,1$ la matrice ottenuta è ridotta di rango 3 , da cui segue che $\dim V = 3$. Calcoliamo, adesso, l'equazione cartesiana di V, tenendo presente che, sempre per $h \neq 0,1$:

$$V = \mathscr{L}((1,0,0,0),(0,h-1,0,h-1),(0,0,h,h)) = \mathscr{L}((1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)).$$

L'equazione cartesiana di V per $h \neq 0,1$ è data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t - y - z = 0.$$

Dunque, per $h \neq 0,1$, vediamo che:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z - t = 0\}.$$

Per $h \neq 0,1$ sappiamo che una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(1,-2,1,-1),(h,2-2h,2h,2),(-1,h+1,-1,h)]$. Una semplice verifica mostra che questi tre vettori verificano l'equazione cartesiana di V, cioè questi 3 vettori appartengono a V. Questo significa che $\operatorname{Im} f \subseteq V$, ma $\dim \operatorname{Im} f = \dim V = 3$ e, dunque, possiamo concludere che per $h \neq 0,1$ $\operatorname{Im} f = V$.

Supponiamo che sia $h = 0$. In tal caso:

$$V = \mathscr{L}((0,0,0,0),(1,-1,0,-1),(2,0,0,0)) = \mathscr{L}((1,-1,0,-1),(1,0,0,0)).$$

Cerchiamo le equazioni cartesiane di V:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & t-y \end{pmatrix}.$$

Questo significa che per $h = 0$ $\dim V = 2$ e:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t - y = 0\}.$$

Per $h = 0$ una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(1, -2, 1, -1), (0, 2, 0, 2)]$ e, dal momento che $(1, -2, 1, -1)$ non verifica le equazioni cartesiane di V, segue che $(1, -2, 1, -1) \notin V$ e che per $h = 0$ $\operatorname{Im} f \neq V$.

Sia, ora, $h = 1$. In tal caso:

$$V = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 1)) = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (2, 0, 1, 1)).$$

Cerchiamo le equazioni cartesiane di V:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & z-t & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo significa che per $h = 1$ $\dim V = 2$ e:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z - t = 0\}.$$

Per $h = 1$ una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $[(1, -2, 1, -1), (1, 0, 2, 2)]$ e, dal momento che $(1, -2, 1, -1)$ non verifica le equazioni cartesiane di V, segue che $(1, -2, 1, -1) \notin V$ e che per $h = 1$ $\operatorname{Im} f \neq V$.

3) Notiamo che:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} = \{(x, y, x + y \in \mathbb{R}^3)\} = \mathscr{L}((1, 0, 1), (0, 1, 1)).$$

Calcoliamo $f(1, 0, 1)$:

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ -2 & 2-2h & h+1 \\ 1 & 2h & -1 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h-1 \\ 0 \\ h-1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $f(1, 0, 1) = (0, h - 1, 0, h - 1)$. Calcoliamo ora $f(0, 1, 1)$:

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ -2 & 2-2h & h+1 \\ 1 & 2h & -1 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h-1 \\ 3-h \\ 2h-1 \\ h+2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $f(0, 1, 1) = (h - 1, 3 - h, 2h - 1, h + 2)$ e:

$$f(W) = \mathscr{L}(f(1, 0, 1), f(0, 1, 1)) = \mathscr{L}((0, h - 1, 0, h - 1), (h - 1, 3 - h, 2h - 1, h + 2)).$$

Calcoliamo la dimensione di $f(W)$:

$$\begin{pmatrix} h-1 & 3-h & 2h-1 & h+2 \\ 0 & h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Se $h \neq 1$, questa è una matrice ridotta di rango 2, cioè per $h \neq 1$ $\dim f(W) = 2$ e $[(h - 1, 3 - h, 2h - 1, h + 2), (0, 1, 0, 1)]$ è una sua base.

Se $h = 1$, vediamo che:

$$f(W) = \mathscr{L}((0, 0, 0, 0), (0, 2, 1, 3)) = \mathscr{L}((0, 2, 1, 3))$$

e, in particolare, in tal caso $\dim f(W) = 1$.

4) Da:

$$g(x,y,z,t) = (2x+2y+z-2t, 2x+y, 2x+y)$$

segue che:

$$\begin{aligned} g(1,0,0,0) =& (2,2,2) \\ g(0,1,0,0) =& (2,1,1) \\ g(0,0,1,0) =& (1,0,0) \\ g(0,0,0,1) =& (-2,0,0) \end{aligned}$$

e, dunque, la matrice assoicata a g rispetto alle basi canoniche è:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice di $g \circ f$ è:

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ -2 & 2-2h & h+1 \\ 1 & 2h & -1 \\ -1 & 2 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & h-1 \\ 0 & 2 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $g \circ f$:

$$\begin{vmatrix} 1-T & 0 & -1 \\ 0 & 2-T & h-1 \\ 0 & 2 & h-1-T \end{vmatrix} = T(1-T)(T-h-1).$$

Gli autovalori, dunque, sono $0, 1, h+1$. Perciò, se $h \neq 0, -1$, i tre autovalori sono a due a due distinti e possiamo concludere che $g \circ f$ è semplice.

Sia, ora, $h = -1$. In tal caso, 0 è un autovalore di molteplicità 2 e 1 è autovalore di molteplicità 1, da cui segue che $g \circ f$ è semplice se $\dim V_0 = 2$. Calcoliamo, dunque, la dimensione di V_0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, segue che $\dim V_0 = 3 - 2 = 1 < m_0 = 2$. Questo significa che, se $h = -1$, $g \circ f$ non è semplice.

Sia, ora, $h = 0$. In tal caso, 1 è un autovalore di molteplicità 2 e 0 è autovalore di molteplicità 1, da cui segue che $g \circ f$ è semplice se $\dim V_1 = 2$. Calcoliamo, dunque, la dimensione di V_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, segue che $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < m_1 = 2$. Questo significa che, se $h = 0$, $g \circ f$ non è semplice.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:

$$r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \text{ e } s: \begin{cases} x + y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

e il piano $\alpha\colon x - y + z = 0$, determinare e studiare la quadrica Q luogo delle rette che sono incidenti a r e s e sono parallele ad α.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e per $O = (0, 0, 0)$ e aventi la retta $r\colon x + y = z = 0$ tangente nel punto O. Determinare centro di simmetria e asintoti dell'iperbole passante per il punto $C = (1, -2, 0)$.

3) Dato il fascio di coniche:

$$\phi : \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - kxz = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

determinare la quadrica contenente la generica conica del fascio ϕ, contenente la conica:

$$\begin{cases} y^2 - z^2 - y + 2 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

e passante per il punto $(1, 0, 1)$. Studiare le quadriche così ottenute al variare del parametro reale k.

Soluzione

1) La generica retta incidente le rette r e s ha equazione:

$$\begin{cases} x - 2y + h(z - 1) = 0 \\ x + y + k(z + 1) = 0 \end{cases}.$$

I parametri direttori di questa retta sono $(-2k - h, -k + h, 3)$. Perché la retta sia parallela al piano α i vettori di componenti $(-2k - h, -k + h, 3)$ e $(1, -1, 1)$ devono essere ortogonali, cioè deve essere pari a 0 il loro prodotto scalare:

$$-2k - h + k - h + 3 = 0 \Rightarrow k = 3 - 2h.$$

Dunque, le rette incidenti r e s e parallele al piano α hanno equazioni:

$$\begin{cases} x - 2y + h(z - 1) = 0 \\ x + y + (3 - 2h)(z + 1) = 0 \end{cases}$$

Per trovare il luogo individuato da queste rette dobbiamo eliminare il parametro h:

$$h = \frac{x - 2y}{1 - z} \Rightarrow x + y + 3z + 3 - 2(z + 1)\frac{x - 2y}{1 - z} = 0.$$

Dunque, il luogo Q ha equazione:

$$(x + y + 3z + 3)(1 - z) - 2(z + 1)(x - 2y) = 0 \Rightarrow 3z^2 + 3xz - 3yz + x - 5y - 3 = 0.$$

La matrice associata a Q è:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B| = 9 > 0$ e che:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Questo significa che Q è un paraboloide iperbolico.

2) Le uniche due coniche spezzate del fascio sono $AB \cup r$ e $OA \cup OB$. Dunque, il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$\lambda(x+y-1)(x+y)+\mu xy=0.$$

Supponiamo $\lambda \neq 0$, dal momento che per $\lambda = 0$ otteniamo la conica spezzata $xy = 0$, e poniamo:

$$\frac{\mu}{\lambda}=h.$$

Così facendo l'equazione del fascio di coniche ha equazione:

$$(x+y-1)(x+y)+hxy=0$$

$$\Rightarrow x^2+(h+2)xy+y^2-x-y=0.$$

La matrice associata al fascio è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{h+2}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{h+2}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che le uniche coniche spezzate si hanno per $h = 0$ e per $\lambda = 0$ e conosciamo già i punti base del fascio. Possiamo, dunque, classificare le coniche:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h+2}{2} \\ \dfrac{h+2}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{-h^2-4h}{4}.$$

Dunque, possiamo dire che per $-4 < h < 0$ $|A| > 0$ e abbiamo delle ellissi. In particolare, per $h = -2$ abbiamo una circonferenza. Per $h = -4$ abbiamo una parabola e ricordiamo nuovamente che per $h = 0$ abbiamo una conica spezzata. Per $h < -4$ e per $h > 0$ vediamo che $|A| < 0$ e abbiamo delle iperboli. Osserviamo che non ci sono iperboli equilatere.

Cerchiamo, adesso, la conica passanter $C = (1, -2, 0)$:

$$-2h+2=0 \Rightarrow h=1.$$

Dunque, effettivamente la conica del fascio passante per C è un'iperbole (lo vediamo dalla classificazione fatta in precedenza) e ha equazione:

$$x^2+3xy+y^2-x-y=0.$$

La matrice associata è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora il centro di simmetria si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2}=0 \\ \dfrac{3}{2}x+y-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria ha coordinate $C = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

Cerchiamo ora gli asintoti dell'iperbole e ricordiamo che gli asintoti sono quelle rette che congiungono il centro di simmetria con i punti impropri. Cerchiamo, perciò, i punti impropri dell'iperbole:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - xt - yt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 3\dfrac{y}{x} + 1 = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Dunque, i punti impropri sono $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0)$ e $(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0)$. Perciò gli asintoti hanno equazioni:

$$y - \frac{1}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right)$$

e

$$y - \frac{1}{5} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right).$$

3) Le quadriche contenenti la generica conica del fascio ϕ hanno equazione:

$$x^2 - y^2 + z^2 - kxz + t(ax + by + cz + dt) = 0,$$

che scritta in coordinate cartesiane diventa:

$$x^2 - y^2 + z^2 - kxz + ax + by + cz + d = 0.$$

Imponiamo adesso che queste quadriche contengano la conica di equazioni:

$$\begin{cases} y^2 - z^2 - y + 2 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Per fare questo facciamo l'intersezione della quadrica con il piano $x = 0$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - kxz + ax + by + cz + d = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2 + z^2 + by + cz + d = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Perché questa conica coincida con la conica:

$$\begin{cases} y^2 - z^2 - y + 2 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

deve esistere un numero h tale che:

$$-y^2 + z^2 + by + cz + d = h(y^2 - z^2 - y + 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 = h \\ 1 = -h \\ b = -h \\ c = 0 \\ d = 2h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = -1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -2. \end{cases}$$

Quindi le quadriche che contengono le due coniche hanno equazione:

$$x^2 - y^2 + z^2 - kxz + ax + y - 2 = 0.$$

Resta da imporre il passaggio per il punto $(1, 0, 1)$:

$$-k + a = 0 \Rightarrow a = k.$$

Dunque, le quadriche ottenute hanno equazione:

$$x^2 - y^2 + z^2 - kxz + kx + y - 2 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e

$$|B| = \frac{28 - 3k^2}{16}.$$

Calcoliamo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{k}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + \frac{k^2}{4}.$$

Dunque, se $k = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ o $k = -2\sqrt{\frac{7}{3}}$, $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$. In tali casi abbiamo un cono.

Se $-2\sqrt{\frac{7}{3}} < k < 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ e $k \neq 2, -2$, vediamo che $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$. In tal caso, abbiamo iperboloidi iperbolici.

Se $k = 2$ o $k = -2$, $|B| > 0$ e $|A| = 0$. In tali casi abbiamo paraboloidi iperbolici.

Se $k < -2\sqrt{\frac{7}{3}}$ oppure $k > 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, allora $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$. In questo caso possiamo avere iperboloidi ellittici o ellissoidi. Per decidere dobbiamo guardare il polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & -\frac{k}{2} \\ 0 & -1-T & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + T^2 + \left(\frac{k^2}{4} + 1\right) T + \frac{k^2}{4} - 1.$$

Dato che $\frac{k^2}{4} + 1 > 0$ per ogni valore di k, vediamo che gli autovalori di A non sono mai delle stesso segno. Questo vuol dire che, in particolare, per $k < -2\sqrt{\frac{7}{3}}$ oppure $k > 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ abbiamo degli iperboloidi ellittici.