

I

Sono assegnati i vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ di \mathbb{R}^3 e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante le immagini

$$\begin{cases} f(v_1) = (2h + 4, 0, 2h + 4) \\ f(v_2) = (h, -h, 4 - h) \\ f(v_3) = (3h + 4, h, 3h + 4) \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

- 1) Determinare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica e studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.
- 2) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, e_3]$.
- 3) Calcolare, al variare di h , la controimmagine

$$f^{-1}(h - 4, -h, 4 - 3h) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (h - 4, -h, 4 - 3h)\}.$$

- 4) Sia $V = \mathcal{L}(v_1, e_3)$, verificare che $f(V) \subseteq V$ per ogni h . Detto $g : V \rightarrow V$ l'endomorfismo indotto da f , studiare la semplicità di g al variare di h .

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

- 1) Sono assegnate le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s} : \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

Calcolare l'angolo $\widehat{\mathbf{rs}}$ che esse formano. Determinare la generica retta \mathbf{t} passante per $P \equiv (1, 1, 1)$ e tale che $\widehat{\mathbf{rt}} = \widehat{\mathbf{rs}}$. Trovare la quadrica Q luogo delle rette \mathbf{t} verificando che si tratta di un cono.

- 2) Determinare e studiare il fascio Φ delle coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A \equiv (-1, 0, 0)$, $B \equiv (1, 6)$ e per $C \equiv (0, 1)$ con tangente la retta $3x - y + 1 = 0$. Determinare vertice, asse, fuoco e direttrice della parabola del fascio.
- 3) Studiare, al variare del parametro reale h , la famiglia di quadriche di equazione

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + 2hxz + 2hx + 4z - 2 = 0$$

SVOLGIMENTO

I

- 1) Determiniamo la matrice associata ad f rispetto alla base canonica risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_3) = (2h + 4, 0, 2h + 4) \\ f(e_1) - f(e_2) = (h, -h, 4 - h) \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (3h + 4, h, 3h + 4) \end{cases} \Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} 2h & h & 4 \\ 0 & h & 0 \\ 4 & h & 2h \end{pmatrix}$$

con $|M(f)| = 4h(h^2 - 4)$. Quindi se $h \neq 0, \pm 2$ f è un isomorfismo.

per $h = 0$: $\text{Im } f = \mathcal{L}((0, 0, 1), (1, 0, 0))$, $\text{ker } f = \{(0, y, 0)\} = \mathcal{L}(0, 1, 0)$;

per $h = 2$: $\text{Im } f = \mathcal{L}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$, $\text{Ker } f = \{(x, 0, -x)\} = \mathcal{L}(1, 0, -1)$;

per $h = -2$: $\text{Im } f = \mathcal{L}((-1, 0, 1), (1, 1, 1))$, $\text{Ker } f = \{(x, 0, x)\} = \mathcal{L}(1, 0, 1)$.

2) Determiniamo la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, e_3]$: dobbiamo considerare le immagini di questi vettori e determinare le loro componenti rispetto ad \mathcal{A} .

$$f(v_1) = (2h + 4, 0, 2h + 4) = (2h + 4)v_1 \Rightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{A}} = (2h + 4, 0, 0),$$

$$f(v_2) = (h, -h, 4 - h) = hv_2 + (4 - h)e_3 \text{ (calcolo esplicito)} \Rightarrow [f(v_2)]_{\mathcal{A}} = (0, h, 4 - h),$$

$$f(e_3) = (4, 0, 2h) = 4v_1 + (2h - 4)e_3 \text{ (calcolo esplicito)} \Rightarrow [f(e_3)]_{\mathcal{A}} = (4, 0, 2h - 4),$$

quindi la matrice associata a f rispetto alla base \mathcal{A} è

$$M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2h + 4 & 0 & 4 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 4 - h & 2h - 4 \end{pmatrix}.$$

3) Dal sistema lineare associato alla seguente matrice completa $(A|B)$ avremo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2h & h & 4 & h - 4 \\ 0 & h & 0 & -h \\ 4 & h & 2h & 4 - 3h \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} h \neq 0, \pm 2 & f^{-1}(h - 4, -h, 4 - 3h) = (1, -1, -1) \\ h = 0 & f^{-1}(-4, 0, 4) = \{(1, y, -1)\} \\ h = 2 & f^{-1}(-2, -2, -2) = \{(x, -1, -x)\} \\ h = -2 & f^{-1}(-6, 2, 10) = \{(z + 2, -1, z)\} \end{cases}$$

4) Da quanto visto sappiamo che

$$\begin{cases} g(v_1) = f(v_1) = (h + 2)v_1 \in V \\ g(e_3) = f(e_3) = 4v_1 + (2h - 4)e_3 \in V \end{cases}$$

Quindi scriviamo la matrice associata a g rispetto alla base $\mathcal{A}' = \{v_1, e_3\}$:

$$M^{\mathcal{A}'}(g) = \begin{pmatrix} h + 2 & 4 \\ 0 & 2h - 4 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di g sono $T = h + 2, 2h - 4$; per $h \neq 6$ questi autovalori sono distinti, quindi g è semplice. Ovviamente sappiamo che $V_{h+2} = \mathcal{L}(v_1)$ e si trova facilmente $V_{2h-4} = \mathcal{L}(4v_1 + (h-6)e_3)$. Per $h = 6$ si ha l'autovalore $T = 8$ doppio e si verifica subito che l'autospazio associato ha dimensione 1 (come prima), quindi g non è semplice.

II

1) Calcoliamo i punti impropri delle due rette: $R_{\infty} \equiv (1, 0, 1, 0)$ e $S_{\infty} \equiv (1, 2, 2, 0)$. Per trovare l'angolo formato dalle due rette, applicando la ben nota formula si ottiene quindi

$$\cos \widehat{\mathbf{r}\mathbf{s}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{\mathbf{r}\mathbf{s}} = \frac{\pi}{4}$$

La retta \mathbf{t} generica passante per un punto proprio $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ ha equazioni

$$\mathbf{t} : \begin{cases} x - x_0 = m(z - z_0) \\ y - y_0 = n(z - z_0) \end{cases} \quad \text{con } T_{\infty} \equiv (m, n, 1, 0)$$

quindi la retta generica \mathbf{t} passante per P ha equazioni

$$\mathbf{t} : \begin{cases} x - 1 = m(z - 1) \\ y - 1 = n(z - 1) \end{cases} \Rightarrow T_{\infty}(m, n, 1, 0)$$

Di conseguenza $\cos \widehat{\mathbf{rt}} = \frac{m+1}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+1}}$ ed imponendo la condizione richiesta si ha

$$\frac{m+1}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n^2 - 2m = 0.$$

Eliminando i parametri m ed n si ha $\frac{(y-1)^2}{(z-1)^2} - 2\frac{x-1}{z-1} = 0$, quindi Q ha equazione

$$Q : y^2 - 2xz + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Con facili calcoli si trova $|B| = 0$, $|A| = -1$, si verifica facilmente che Q è un cono di vertice P .
2) Ci troviamo nel caso della tangenza, quindi nel fascio Φ ci sono solo due coniche spezzate distinte. Usiamo queste coniche per determinare l'equazione del fascio

$$\Phi : (y - 3x - 1)(y - 3x - 3) + h(y - x - 1)(y - 5x - 1) = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\Phi : (5h + 9)x^2 + (1 + h)y^2 - 6(1 + h)xy + 6(2 + h)x - 2(2 + h)y + h + 3 = 0.$$

Naturalmente conosciamo le coniche spezzate ed i punti base di Φ (in ogni caso $|B| = 4h$) e dobbiamo caratterizzare le sue coniche irriducibili. $|A| = -4h(h + 1)$ quindi si ha:

$$|A| > 0 \quad -1 < h < 0 \quad \text{ELLISSI. Non ci sono circonferenze;}$$

$$|A| < 0 \quad h < -1, h > 0 \quad \text{IPERBOLI. Per } h = -\frac{5}{3} \text{ si ha l'iperbole equilatera;}$$

$$|A| = 0 \quad h = 0, -1 \quad ; \text{ per } h = -1 \text{ si ha la PARABOLA } y = 2x^2 + 3x - 1.$$

La parabola del fascio ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y quindi per determinare il vertice, l'asse, il fuoco e la direttrice, usiamo le ben note formule:

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V \equiv \left(-\frac{3}{4}, -\frac{17}{8}\right),$$

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow F = \left(-\frac{3}{4}, -2\right)$$

$$\text{direttrice: } y = -\frac{1+\Delta}{4a} \Rightarrow y = -\frac{9}{4}$$

3) Dalla matrice B associata alla quadrica si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & h \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ h & 0 & 2 & 2 \\ h & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |B| = -4(h^2 - 2) \\ |A| = h^2 - 2 \end{cases}$$

quindi per $h = \pm\sqrt{2}$ dato che $\rho(B) = 3$ e $|A| = 0$ si trovano due CILINDRI di vertici $(\mp\sqrt{2}, 0, 1, 0)$. Si osservi che per $h = \infty$ si ha la quadrica spezzata $x(z + 1) = 0$. Per nessun valore di h si hanno paraboloidi. Per $h \neq \pm\sqrt{2}$ si trovano ellissoidi oppure iperboloidi. Il P.C. di A è $x^3 - 2x^2 - (h^2 + 1)x + 2 - h^2$, quindi non avendosi mai né tutte variazioni né tutte permanenze non si hanno ellissoidi. Si hanno due casi

- $|B| > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < h < \sqrt{2}$ IPERBOLOIDI IPERBOLICI;
- $|B| < 0 \Rightarrow h < -\sqrt{2}, h > \sqrt{2}$ IPERBOLOIDI ELLITTICI.