CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria**- 30 Gennaio 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $u_1 = (1,0,0,-1)$, $u_2 = (1,0,1,,0)$, $u_3 = (0,1,0,1)$ e $u_4 = (0,0,0,1)$ e l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (1,0,1,0) \\ f(u_2) &= (h+4,-1,2,0) \\ f(u_3) &= (0,1,h-1,h) \\ f(u_4) &= (0,0,0,h) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando le equazioni cartesiane di $Im\ f$ e $Ker\ f$.

2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Dati i sottospazi $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+2z = y+z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y+z = x+y-z = 0\}$, dire se la somma $V+W$ è diretta e determinare $f(V)$, $f(W)$ e $f(V)+f(W)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Detta $i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da $i(x,y,z) = (x,y,0,z)$, studiare l'applicazione lineare $g = f \circ i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e determinare $g^{-1}(1,1,h,0)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la distanza delle due rette:

$$r: \begin{cases} x+y=1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$$

2) Determinare e studiare il fascio di coniche tali che le rette $r_1 : z = x-3y-1 = 0$ e $r_2 : z = 3x-y+1 = 0$ siano loro tangenti nei punti in cui esse sono incontrate dalla retta $t : z = x+y-1 = 0$. In particolare, si determinino la circonferenza, l'iperbole equilatera e la parabola del fascio.

3) Determinare e studiare la totalità delle quadriche contenenti le coniche di equazioni:

$$\begin{cases} y=0 \\ z^2-x=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y-z=0 \\ 2z^2-x=0. \end{cases}$$

Tra le quadriche trovate determinare quella passante per il punto (1,1,0) e caratterizzare i piani che la secano in parabole.

Soluzione

1. Le condizioni sulle immagini dei vettori u_1, u_2, u_3 e u_4 ci dicono che:

$$\begin{cases} f(e_1) - f(e_4) = (1,0,1,0) \\ f(e_1) + f(e_3) = (h+4,-1,2,0) \\ f(e_2) + f(e_4) = (0,1,h-1,h) \\ f(e_4) = (0,0,0,h) \end{cases}$$

Questo è un sistema la cui soluzione è:

$$\begin{cases} f(e_1) = (1,0,1,h) \\ f(e_2) = (0,1,h-1,0) \\ f(e_3) = (h+3,-1,1,-h) \\ f(e_4) = (0,0,0,h) \end{cases} \Rightarrow M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & h-1 & 1 & 0 \\ h & 0 & -h & h \end{pmatrix}$$

Dunque, $|M(f)| = -3h$, e, allora, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$. Se $h = 0$, la matrice diventa:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\rho(M(f)) = 3$, così che $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Dal momento, poi, che gli elementi speciali della matrice ridotta ottenuta da $M(f)$ sono nelle prime tre colonne, ricaviamo che una base di $\operatorname{Im} f$ è costituita dai vettori $(1,0,1,0)$, $(0,1,-1,0)$, $(3,-1,1,0)$. Per ottenere l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$ dobbiamo imporre che la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

abbia rango 3 e non quattro. Dal momento che questa è una matrice quadrata di ordine 4, è sufficiente imporre che il suo determinante sia zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3t = 0$$

è, dunque, $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 0\}$. Per quel che riguarda il nucleo di f, esso si ricava risolvendo il sistema omogeneo associato a $M(f)$ e, dunque, alla matrice ridotta ottenuta a partire da essa:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3z = 0, y - z = 0, -3z = 0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = 0\}.$$

Queste appena ricavate sono le sue equazioni cartesiane, mentre, per quanto riguarda il suo generatore, è chiaro che $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,0,0,1))$.

2. Il polinomio caratteristico di f è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & h+3 & 0 \\ 0 & 1-T & -1 & 0 \\ 1 & h-1 & 1-T & 0 \\ h & 0 & -h & h-T \end{vmatrix} = (h-T)(1-T)(-1-T)(3-T),$$

così che gli autovalori sono 1, -1, 3, h. Per $h \neq 1, -1, 3$ possiamo dire che f è certamente semplice, avendo tutti gli autovalori molteplicità algebrica 1. Adesso vediamo cosa accade negli altri casi.

Se $h = 1$, allora tutti gli autovalori sono semplici, tranne 1 che ha molteplicità algebrica 2. f, dunque, è semplice solamente se $\dim V_2 = 2$. Per fare questo dobbiamo andare a sostituire, nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico, al posto di T l'autovalore 1 e al posto di h 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\longmapsto}^{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2 e, quindi, $\dim V_2 = 4 - 2 = 2$. Possiamo, dunque, concludere che per $h = 1$ f è semplice.

Sia, adesso, $h = -1$. In tal caso, abbiamo gli autovalori 1 e 3 con molteplicità algebrica 1 e l'autovalore -1 con molteplicità algebrica 2. f è semplice, in tal caso, se e solo se $\dim V_{-1} = 2$. Adesso, nella matrice da cui abbiamo ricavato il polinomio caratteristico dobbiamo mettere $T = -1$ e $h = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\longmapsto}^{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e troviamo che ha rango 3. Perciò $\dim V_{-1} = 4 - 3 = 1 < 2$. f, allora, nel caso $h = -1$ non è semplice.

Infine, se $h = 3$, 1 e -1 sono autovalori semplici, mentre 3 ha molteplicià 2. f è semplice se e solo se $\dim V_3 = 2$. Adesso dobbiamo mettere nella matrice $T = 3$ e $h = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\longmapsto}^{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui vediamo che ha rango 3. Perciò $\dim V_3 = 4 - 3 = 1 < 2$ e f non è semplice è per $h = 3$.

3. Cominciamo col ricordare che la somma $V + W$ è diretta se e solo se $V \cap W = \{\underline{0}_{\mathbb{R}^4}\}$. Vediamo, dunque, di calcolare $V \cap W$:

$$V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0, y + z = 0, 2x - y + z = 0, x + y - z = 0\}.$$

Perciò $V \cap W$ è la soluzione del sistema omogeneo associato a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, dal momento che questa matrice ha rango al massimo 3, vediamo che questo sistema ammette almeno $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni, cioè c'è almeno un vettore non nullo in $V \cap W$ e, perciò, la somma $V + W$ non è diretta.

Passiamo adesso a determinare $f(V)$ e $f(W)$ e, per fare questo, abbiamo bisogno dei generatori di V e W:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -y, x = 3y\} = \{(3y, y, -y, -t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((3, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, z = y\} = \{(0, y, y, t) \in \mathbb{R}^4 = \mathscr{L}((0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$$

da cui segue che:

$$f(V) = \mathscr{L}(f(3, 1, -1, 0), f(0, 0, 0, 1))$$

$$f(W) = \mathscr{L}(f(0,1,1,0), f(0,0,0,1)).$$

Le immagini dei vettori sono calcolate nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h+3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & h-1 & 1 & 0 \\ h & 0 & -h & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ 2 \\ h+1 \\ 4h \end{pmatrix} \Rightarrow f(3,1,-1,0) = (-h,2,h+1,4h)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h+3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & h-1 & 1 & 0 \\ h & 0 & -h & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+3 \\ 0 \\ h \\ -h \end{pmatrix} \Rightarrow f(0,1,1,0) = (h+3,0,h,-h)$$

così che:

$$f(V) = \mathscr{L}((-h,2,h+1,4h),(0,0,0,h))$$
$$f(W) = \mathscr{L}((h+3,0,0,-h),(0,0,0,h)).$$

Mettendo i generatori di $f(V)$ in matrice e cercandone il rango possiamo stabilire la sua dimensione:

$$\begin{pmatrix} -h & 2 & h+1 & 4h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

e vediamo che $\dim f(V) = 2$ se $h \neq 0$ e i due vettori costituiranno una base di $f(V)$, mentre $\dim f(V) = 1$ se $h = 0$ ed è generato dal vettore $(0,2,1,0)$.

Procediamo nello stesso modo per $f(W)$:

$$\begin{pmatrix} h+3 & 0 & h & -h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

e vediamo che $\dim f(W) = 2$ se $h \neq 0$ e i due vettori costituiscono una base di $f(W)$, mentre $\dim f(W) = 1$ se $h = 0$ ed è generato dal vettore $(3,0,0,0)$.

Infine:

$$f(V) + f(W) = \mathscr{L}((-h,2,h+1,4h),(h+3,0,h,-h),(0,0,0,h))$$

e per calcolarne la dimensione guardiamo il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} -h & 2 & h+1 & 4h \\ h+3 & 0 & h & -h \\ 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}.$$

Dal momento che tale matrice è ridotta vediamo subito che il suo rango è 3 per $h \neq 0$ e, quindi, in tal caso $\dim(f(V) + f(W)) = 3$. Mentre per $h = 0$ vediamo subito che ha rango 2 e, in tal caso, $\dim(f(V) + f(W)) = 2$.

4. Per studiare g ci serve la matrice associata a i rispetto alle basi canoniche:

$$M(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$M(g) = M(f) \cdot M(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & h-1 & 1 & 0 \\ h & 0 & -h & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & h-1 & 0 \\ h & 0 & h \end{pmatrix}$$

e, riducendo, arriviamo a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che se $h \neq 0$, $\rho(M(g)) = 3$, cioè $\dim \operatorname{Im} g = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - 3 = 0$. Dunque, g è iniettiva e una base di $\operatorname{Im} g$ è formata da $(1, 0, 1, h)$, $(0, 1, h - 1, 0)$, $(0, 0, 0, h)$. Se $h = 0$, $\rho(M(g)) = 2$, cioè $\dim \operatorname{Im} g = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - 2 = 1$. Una base di $\operatorname{Im} g$ è formata dai vettori $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$, mentre il nucleo è:

$$\operatorname{Ker} g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} = \mathscr{L}((0, 0, 1)).$$

Passiamo, ora, a calcolare $g^{-1}(1, 1, h, 0)$. Dobbiamo risolvere un sistema la cui matrice completa è la seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & h-1 & 0 & h \\ h & 0 & h & 0 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -h \end{array}\right)$$

per cui, se $h \neq 0$:

$$g^{-1}(1, 1, h, 0) = \{(1, 1, -1)\}$$

mentre, per $h = 0$:

$$g^{-1}(1, 1, 0, 0) = \{(1, 1, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

II

1. Le due rette r e s sono rette sghembe, dal momento che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Dunque, la distanza tra le due rette è la distanza tra i due punti d'intersezione di r e di s con la retta t ortogonale e incidente a entrambe. Cominciamo col calcolare questa retta t e osserviamo che essa è una retta congiungente un punto di r e uno di s. Cerchiamo, allora, il generico punto P_r di r e il generico punto P_s di s:

$$r : \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow P_r = (\alpha, 1 - \alpha, 1) \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_s = (0, 0, \beta)$$

I parametri direttori della retta t sono dati dalla differenza delle coordinate di P_r e di P_s, cioè sono $(\alpha, 1 - \alpha, 1 - \beta)$. Osserviamo anche che i parametri direttori di r sono $(1, -1, 0)$ e che quelli di s sono $(0, 0, 1)$. Imponiamo l'ortogonalità con r e con s:

$$\begin{cases} \alpha - 1 + \alpha = 0 \\ 1 - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Dunque, la retta t ortogonale e incidente r e s è la retta congiungente i punti $P_r = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ e $P_s = (0, 0, 1)$ e i punti in cui essa incontra r e s sono esattamente P_r e P_s. Adesso è possibile calcolare la distanza:

$$d(r, s) = \overline{P_r P_s} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Il fascio di coniche da studiare è il seguente:

$$\lambda(x-3y-1)(3x-y+1)+\mu(x+y-1)^2=0$$

che, ponendo $h=\frac{\mu}{\lambda}$ ed escludendo la conica spezzata $(x+y-1)^2=0$, può essere scritto in questo modo:

$$(x-3y-1)(3x-y+1)+h(x+y-1)^2=0$$
$$\Rightarrow (h+3)x^2+(h+3)y^2+(2h-10)xy+(-2h-2)x+(-2h-2)y+h-1=0.$$

La matrice associata a questo fascio di coniche è:

$$B=\begin{pmatrix} h+3 & h-5 & -h-1 \\ h-5 & h+3 & -h-1 \\ -h-1 & -h-1 & h-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B|=-64h$$

da cui segue che l'unica conica spezzata del fascio, oltre a quella esclusa è quella che si ottiene per $h=0$, che è la conica spezzata nelle due rette tangenti. Ossrrviamo, però, che questo già era noto dal momento che abbiamo costruito un fascio di coniche bitangenti e, quindi, il calcolo di $|B|$ è, in tal caso, superfluo. Calcoliamo ora il determinante di A:

$$|A|=\begin{vmatrix} h+3 & h-5 \\ h-5 & h+3 \end{vmatrix}=16(h-1).$$

Possiamo concludere che, se $h>1$, abbiamo delle ellissi e, in particolare, per $h=5$, abbiamo una circonferenza di equazione $x^2+y^2-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=0$, se $h=1$, abbiamo una parabola di equazione $x^2+y^2-2xy-x-y=0$, se $h<1$, $h\neq 0$, abbiamo delle iperboli e, in particolare, l'iperbole equilatera, che si ottiene quando $\mathrm{Tr}(A)=0$, cioè $2(h+3)=0$, si ha per $h=-3$ e ha equazione $4xy-x-y+1=0$.

3. Le quadriche contenenti la conica di equazioni $y=z^2-x=0$ sono:

$$y(ax+by+cz+d)+z^2-x=0.$$

Ora cerchiamo la sua intersezione con il piano $y-z=0$ e imponiamo che si ottenga la conica di equazioni $y-z=2z^2-x=0$:

$$\begin{cases} y(ax+by+cz+d)+z^2-x=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z \\ axz+(b+c+1)z^2+dz-x=0. \end{cases}$$

Perché questa conica trovata coincida con quella di equazioni $y-z=2z^2-x=0$ deve essere:

$$axz+(b+c+1)z^2+dz-1=\lambda(2z^2-x)$$

per qualche $\lambda\in\mathbb{R}$. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a=0 \\ b+c+1=2\lambda \\ d=0 \\ -1=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ a=0 \\ c=1-b \\ d=0 \end{cases}$$

per cui le nostre quadriche hanno equazione:

$$y[by+(1-b)z]+z^2-x=0 \Rightarrow by^2+z^2+(1-b)yz-x=0.$$

La matrice associata è:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & b & \frac{1-b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-b}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $|B| = \frac{1}{16}(b^2 - 6b + 1)$, per cui:

$$|B| > 0 \Leftrightarrow b < 3 - 2\sqrt{2}, b > 3 + 2\sqrt{2},$$

$$|B| = 0 \Leftrightarrow b = 3 - 2\sqrt{2}, b = 3 + 2\sqrt{2},$$

$$|B| < 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} < b < 3 + 2\sqrt{2}$$

mentre $|A| = 0$. Possiamo concludere che per $b < 3 - 2\sqrt{2}$ e per $b > 3 + 2\sqrt{2}$ abbiamo dei paraboloidi iperbolici, mentre per $3 - 2\sqrt{2} < b < 3 + 2\sqrt{2}$ abbiamo dei paraboloidi ellittici. Nei casi restanti dobbiamo vedere il rango di B, perché per adesso possiamo dire solo che abbiamo dei cilindri o delle quadriche spezzate. Se $b = 3 - 2\sqrt{2}$, allora:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} & \sqrt{2} - 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} - 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che, in questo caso $\rho(B) = 3$, otteniamo che la quadrica è un cilindro per $b = 3 - 2\sqrt{2}$. Sia $b = 3 + 2\sqrt{2}$ e, allora:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 + 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} - 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} - 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e anche in questo caso $\rho(B) = 3$ e, quindi, anche per $b = 3 + 2\sqrt{2}$ la quadrica è un cilindro.

Cerchiamo, ora, la quadrica passante per $(1, 1, 0)$:

$$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

e, dunque, la quadrica cercata ha equazione $y^2 + z^2 - x = 0$. Essa è un paraboloide ellittico e, quindi, la sua C_∞ si spezza in due rette immaginarie e coniugate. Tali rette avranno in comune un punto reale P e i piani che secano la quadrica in parabole sono precisamente quelli passanti per P. Calcoliamo la C_∞:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - xt = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y + iz)(y - iz) = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Allora la C_∞ è unione delle rette $y + iz = t = 0$ e $y - iz = t = 0$. Il punto P è il punto comune alle due rette:

$$\begin{cases} y + iz = 0 \\ y - iz = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

cioè $P = (1, 0, 0, 0)$ e i piani che ci interessano sono quelli passanti per P:

$$ax + by + cz + dt = 0 \quad \overset{\text{passaggio per } P}{\overbrace{\longmapsto}} \quad a = 0,$$

cioè i piani che secano la quadrica in parabole sono tutti quelli del tipo $by + cz + d = 0$.