CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale -
- Ingegneria Edile-Architettura (M-Z) -
- Ingegneria delle Telecomunicazioni - Ingegneria Informatica (A-F), (R-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 2 Dicembre 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo determinato dalla matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & 2h+1 & 0 \\ 0 & -2h & 2h & 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ per ogni h.

2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando gli autospazi per ogni h.

3) Detto $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y-z+t=0\}$, mostrare che la restrizione $f|_V\colon V \to \mathbb{R}^4$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ e trovare una base di autovettori per g indipendente dal parametro h.

4) Posto $v = (h,0,1,0)$, calcolare $f^{-1}(v) = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid f(u) = v\}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Cominciamo con l'osservare che:
$$|M(f)| = h(2h+1).$$
Questo vuol dire che, se $h \neq 0, -\frac{1}{2}$, allora f è un isomorfismo.
Se $h = 0$, allora:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Il sistema omogeneo associato a $M(f)$, che è ridotta di rango 3, determina il nucleo e, dunque, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t=0, -y+z=0, t=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R} \mid x=0, y=z, t=0\}$$
$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,1,1,0)).$$
Per quel che riguarda $\operatorname{Im} f$, osserviamo che $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e che:
$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,1)) = \mathscr{L}((1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

Dunque, l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$ è $y = 0$, dal momento che i tre vettori verificano tale equazione. Ciò si evince anche da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0$$

che conferma che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0\}.$$

Se $h = -\frac{1}{2}$, allora:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

in modo che:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0, y = 0, y - z + t = 0\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0, y = 0, z - t = 0\}.$$

In particolare, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0, 0, 1, 1))$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Per quel che riguarda $\operatorname{Im} f$, riduciamo $M(f)$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, si vede che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 3$ e che:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (-1, 0, 0, -1)) = \mathscr{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

In tal caso, l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$ si può ricava da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0,$$

in modo che:

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}.$$

2. Per studiare la semplicità di f, dobbiamo calcolare il polinomio caratteristico e ricavarci, in tal modo, gli autovalori:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 1 & -1 & 1 \\ 0 & h-T & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & 2h+1-T & 0 \\ 0 & -2h & 2h & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(h-t)(2h+1-T).$$

Se $h \neq 1, 0, -1$, allora gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 2, h con molteplicità algebrica 1 e $2h + 1$ con molteplicità algebrica 1. Se $h = 0$, allora gli autovalori sono 1 con molteplicità 3 e 0 con molteplcità 1. Se $h = 1$, gli autovalori sono 1 con molteplcità 3 e 3 con molteplcità 1. Infine, se $h = -1$ gli autovalori sono 1 e -1, entrambi con molteplicità 2.

Supponiamo $h \neq 1, 0, -1$. Dal momento che h e $2h + 1$ hanno entrambi molteplicità algebrica 1, possiamo dire che $\dim V_h = 1 = m_h$ e che $\dim V_{2h+1} = 1 = m_{2h+1}$. Dunque, in tal caso, f è semplice se

$\dim V_1 = m_1 = 2$. Calcoliamo, dunque, l'autospazio V_1, sostituendo, nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico, al posto di T 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & 2h & 0 \\ 0 & -2h & 2h & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $h \neq 0,1$, questa matrice ha rango 3, di modo che $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$. Questo significa che f non è semplice per $h \neq 0, 1 - 1$. Notiamo, poi, che:

$$V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z + t = 0, (h-1)y = 0, 2hz = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0,0)).$$

Calcoliamo, ora, sempre per $h \neq 1, 0, -1$, V_h:

$$\begin{pmatrix} 1-h & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & h+1 & 0 \\ 0 & -2h & 2h & 1-h \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1-h & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-h \end{pmatrix},$$

da cui:

$$\begin{aligned} V_h = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (1-h)x + y - z + t = 0, (-h-1)y + (h+1)z = 0, (1-h)t = 0\} = \\ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z, t = 0\} = \mathscr{L}((0,1,1,0)). \end{aligned}$$

Se $h \neq 1, 0, -1$, allora V_{2h+1} è dato da:

$$\begin{pmatrix} -2h & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -h-1 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2h & 2h & -2h \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -2h & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h & -2h \end{pmatrix}$$

da cui:

$$\begin{aligned} V_{2h+1} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2hx + y - z + t = 0, (-h-1)y = 0, 2hz - 2ht = 0\} = \\ \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = 0, z - t = 0\} = \mathscr{L}((0,0,1,1)). \end{aligned}$$

Da questo segue che, considerati $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$ e $v_3 = (0,0,1,1)$, per $h \neq 0, 1, -1$ e, dunque, anche per $h = 1, 0, -1$, si ha:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 \\ f(v_2) &= hv_2 \\ f(v_3) &= (2h+1)v_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 3 e $m_1 = 3$ e $m_3 = 1$. Da (1), vediamo che v_3 è un autovettore associato all'autovalore 3 e, dal momento che $\dim V_3 = 1$, necessariamente si ha $V_3 = \mathscr{L}(v_3)$. Da (1) ricaviamo anche che v_1, v_2 sono autovettori (linearmente indipendenti) associati all'autovalore 1. Calcoliamo V_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1-h & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim V_1 = 4 - \rho = 2 < 3 = m_1$. Questo ci dice che anche nel caso $h = 1$ f non è semplice e, inoltre, dal momento che $\dim V_1 = 2$ e v_1, $v_2 \in V_1$ sono linearmente indipendenti, abbiamo:

$$V_1 = \mathscr{L}(v_1, v_2).$$

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 0 e $m_1 = 3$ e $m_0 = 1$. Allora $V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0,1,1,0)) = \mathscr{L}(v_2)$, mentre, per quel che riguarda l'autovalore 1, da (1) ricaviamo che v_1, v_3 sono autovettori (linearmente indipendenti) associati all'autovalore 1. Calcoliamo V_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim V_1 = 4 - \rho = 2 < 3 = m_1$. Come prima, questo significa che f non è semplice e, dato che $v_1, v_3 \in V_1$ e sno linearmente indipendenti, allora deve essere:

$$V_1 = \mathscr{L}(v_1, v_3).$$

Sia, ora, $h = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1, entrambi con molteplicità 2. Ma, da (1) vediamo che $v_2, v_3 \in V_{-1}$ e, dato che sono linearmente indipendenti e che $\dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$, deve essere:

$$V_{-1} = \mathscr{L}(v_2, v_3).$$

Resta da calcolare V_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim V_1 = 4 - \rho = 1 < 2 = m_1$, per cui f non è semplice neanche in questo caso. Inoltre, dato che da (1) segue che $v_1 \in V_1$, allora, deve essere:

$$V_1 = \mathscr{L}(v_1).$$

3. Dal momento che v_1, v_2, v_3 sono vettori linearmente indipendenti che verificano l'equazione cartesiana di V e che $\dim V = 3$, allora $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono una base di V. E, dunque, dato che:

$$\begin{aligned} f|_V(v_1) &= f(v_1) = v_1 \\ f|_V(v_2) &= f(v_2) = hv_2 \\ f|_V(v_3) &= f(v_3) = (2h+1)v_3 \end{aligned}$$

concludiamo che $\operatorname{Im} f|_V = f(V) \subseteq V$. Perciò, $f|_V$ induce un endomorfismo $g \colon V \to V$. Ma, a questo punto:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= f|_V(v_1) = v_1 \\ g(v_2) &= f|_V(v_2) = hv_2 \\ g(v_3) &= f|_V(v_3) = (2h+1)v_3, \end{aligned}$$

così che v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di autovettori di g indipendente dal parametro h e, dunque, g è semplice per ogni h.

4. Per calcolare $f^{-1}(h,0,1,0)$, dobbiamo risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & h \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & 2h+1 & 0 & 1 \\ 0 & -2h & 2h & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Se $h \neq 0, -\frac{1}{2}$, il rango della matrice incompleta, cioè di $M(f)$, è 4 e, dunque, il sistema ammette una sola soluzione:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & h \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h-1 & 2h+1 & 0 & 1 \\ 0 & -2h & 2h & 1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{\text{scambiando le righe}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & h \\ 0 & -2h & 2h & 1 & 0 \\ 0 & -h-1 & 2h+1 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque, $f^{-1}(h,0,1,0)$ è determinato dal sistema:

$$\begin{cases} hy = 0 \\ (-h-1)y + (2h+1)z = 1 \\ (-2h)y + 2hz = 0 \\ x + y - z + t = h \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(h,0,1,0) = \{(h+1, 0, \frac{1}{2h+1}, -\frac{2h}{2h+1})\}.$$

Se $h = 0$, allora il sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & |0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $f^{-1}(h,0,1,0)$ è determinato dal sistema:

$$\begin{cases} t = 0 \\ -y + z = 1 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(h,0,1,0) = \{(1, y, y+1, 0) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Se $h = -\frac{1}{2}$, allora, possiamo subito concludere che $f^{-1}(-\frac{1}{2},0,1,0) = \emptyset$, dal momento che $(-\frac{1}{2},0,1,0) \notin \operatorname{Im} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z = 0\}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

e il punto $P = (1,0,1)$, determinare le rette passanti per P, incidenti la retta r e che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

2) Dati, nel piano $z = 0$, i punti $A = (1,2,0)$, $B = (-1,-2,0)$, $C = (2,1,0)$ e $D = (-2,-1,0)$, sia c la circonferenza passante per A, B e C e γ l'iperbole equilatera passante per A, B, C e D. Studiare il fascio generato da c e da γ.

3) Determinare il cono Q contenente la conica di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e avente come vertice il punto $V = (0,0,1)$. Determinare la natura della conica sezione di Q con il piano di equazione $\pi : x - z = 0$, specificando, in particolare, se tale conica risulti spezzata o meno.

Soluzione

1. Possiamo determinare le due rette come l'intersezione tra il luogo della rette che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con il piano contenente la retta r e passante per P.

   Cominciamo con l'osservare che i parametri direttori della retta r sono:

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

   cioè sono $(0,1,1)$. La generica retta contenente il punto P ha equazione:

$$\begin{cases} x - 1 = ly \\ z - 1 = ny \end{cases} \tag{2}$$

e, perché formi un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r deve essere:

$$\frac{1+n}{\sqrt{l^2+1+n^2}\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow l^2 = 2n.$$

Ma, da (2):

$$\begin{cases} l = \frac{x-1}{y} \\ n = \frac{z-1}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{y^2} = 2\frac{z-1}{y}.$$

Dunque, il luogo delle rette passanti per P e che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r ha equazione:

$$(x-1)^2 - 2y(z-1) = 0.$$

Cerchiamo, ora, il piano contenente r e il punto P:

$$\lambda(x-y+z) + \mu(2x+y-z-3) = 0 \overset{\text{imponendo il passaggio per } P}{\longmapsto} 2\lambda - 2\mu = 0.$$

Dunque, il piano cercato è $x-1=0$. Allora le rette passanti per P e che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$ sono date dall'intersezione:

$$(x-1)^2 - 2y(z-1) = 0x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} z-1 = 0 \\ x-1 = 0. \end{cases}$$

2. Cominciamo col determinare la circonferenza c. La generica circonferenza del piano ha equazione $x^2+y^+ax+by+c=0$. Imponendo il passsaggio per A, B e C abbiamo:

$$\begin{cases} a+2b+c+5=0 \\ -a-2b+c+5=0 \\ 2a+2b+c+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=-5. \end{cases}$$

Dunque, la circonferenza c ha equazione $x^2+y^2-5=0$ e, osserviamo che anche $D \in c$. Questo vuol dire che il fascio generato da c e da γ coincide col fascio di coniche generato dai punti A, B, C e D. Per generare questo fascio prendiamo, allora la circonferenza c e una delle coniche spezzate, ad esempio $AB \cup CD$:

$$\lambda(x^2+y^2-5) + \mu(x-2y)(2x-y) = 0.$$

Supponiamo $\lambda \neq 0$ e poniamo $h = \frac{\mu}{\lambda}$, in modo da escludere la conica spezzata $AB \cup CD$ dallo studio del fascio di coniche:

$$\lambda(x^2+y^2-5) + \mu(x-2y)(2x-y) = 0 \Rightarrow (2h+1)x^2 + (2h+1)y^2 - 5hxy - 5 = 0.$$

Le coniche spezzate sappiamo già che sono la conica esclusa $(x-2y)(2x-y)=0$, la conica $AC \cup BD$ di equazione $(x+y-3)(x+y+3)=0$ e la conica $AD \cup BC$ di equazione $(x-y+1)(x-y-1)=0$. La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 2h+1 & -\frac{5}{2}h & 0 \\ -\frac{5}{2}h & 2h+1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \frac{5}{4}(9h^2-16h-4) = 0 \Leftrightarrow h = 2 \text{ e } h = -\frac{2}{9}.$$

Dunque, sappiamo che se $h \neq 2, -\frac{2}{9}$, abbiamo coniche irriducibili. Cerchiamo di classificarle:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2h+1 & -\frac{5}{2}h \\ -\frac{5}{2}h & 2h+1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}(9h^2-16h-4).$$

Allora:

- se $-\frac{2}{9} < h < 2$, abbiamo delle ellissi. In particolare, come sappiamo, per $h = 0$, abbiamo una circonferenza.
- se $h < -\frac{2}{9}$ o $h > 2$, allora abbiamo delle iperboli. In particolare, per $h = -\frac{1}{2}$, abbiamo l'iperbole equilatera γ di equazione $xy - 2 = 0$.

Non ci sono parabole in questo fascio di coniche.

3. Il generico punto P di Γ ha coordinate $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove:

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta - 1 = 0. \tag{3}$$

La retta PV ha equazione:

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \beta t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Dunque assieme alla (3):

$$\begin{cases} \alpha^2 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta - 1 = 0 \\ x = \alpha t \\ y = \beta t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - z \\ \alpha = \frac{x}{1-z} \\ \beta = \frac{y}{1-z} \\ \alpha^2 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{1-z}\right)^2 - 3\frac{xy}{(1-z)^2} - 1 = 0.$$

Dunque il cono Q ha equazione:

$$x^2 + 2y^2 - 3xy - (1-z)^2 = 0.$$

La conica $Q \cap \pi$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy - (1-z)^2 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2 - 3xy + 2x - 1 = 0 \\ z = x. \end{cases}$$

Allora la concia è l'intersezione della quadrica $Q' : 2y^2 - 3xy + 2x - 1 = 0$ e diel piano π. Q' è un cilindro di vertice il punto $(0, 0, 1, 0)$, come si vede dalla sua matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, la sua C_∞ si spezza in due rette distinte:

$$\begin{cases} y(2y - 3x) = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Dunque, Q' è un cilindro iperbolico e, dal momento che il vertice $(0, 0, 1, 0) \notin \pi$, deduciamo che $Q' \cap \pi$ è una conica irriducibile e, più precisamente, un'iperbole.