CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria**- 29 Settembre 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (h+2,-h+2,-h+2) \\ f(1,-1,1) &= (h,-h,h) \\ f(0,1,1) &= (2,-h+2,-h+2). \end{aligned}$$

1) Studiare f, determinando, in particolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le equazioni cartesiane di nucleo e immagine.
2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, ove possibile, una base di autovettori.
3) Se $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0\}$, calcolare $f^{-1}(V)$ al variare di h, specificandone la dimensione. Mostrare, poi, che la restrizione $f|_V$ di f a V induce un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$.
4) Nel caso $h=-1$, detta $f^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione inversa di f, determinare una matrice associata a f^{-1}.

Soluzione

1) Per studiare f cominciamo col trovare la matrice associata a f rispetto alla base canonica. Per ipotesi abbiamo:

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = f(1,1,1) = (h+2,-h+2,-h+2) \\ f(e_1)-f(e_2)+f(e_3) = f(1,-1,1) = (h,-h,h) \\ f(e_2)+f(e_3) = f(0,1,1) = (2,-h+2,-h+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (h,0,0) \\ f(e_2) = (1,1,-h+1) \\ f(e_3) = (1,-h+1,1). \end{cases}$$

Dunque:

$$M^{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-h \\ 0 & 1-h & 1 \end{pmatrix},$$

da cui troviamo che $|M^{\mathscr{E}}(f)| = h^2(2-h)$. Perciò, per $h \neq 0,2$, f è un isomorfismo, cioè $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Se $h=0$, allora:

$$M^{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue che, in tal caso, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{E}}(f)) = 1$ e che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,1,1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=y-z=0\}$. Per quel che riguarda il nucleo, invece, abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+z=0\} = \mathscr{L}((1,0,0),(0,1,-1)).$$

Se $h = 2$, allora:

$$M^{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{E}}(f)) = 2$ e che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1,0,0),(1,1,-1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$. Per quel che riguarda il nucleo, abbiamo:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = y - z = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,-1)).$$

2) Per studiare la semplicità di f, dobbiamo calcolare il suo polinomio caratteristico:

$$P(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & 1 \\ 0 & 1-T & 1-h \\ 0 & 1-h & 1-T \end{vmatrix} = (h-T)^2(-T+2-h).$$

Gli autovalori, dunque, sono $T = h$ e $T = 2-h$. Se $h \neq 1$, allora h è autovalore con molteplicità algebrica 2 e $2-h$ è autovalore con molteplicità algebrica 1, mentre per $h = 1$ l'unico autovalore è 1 con molteplicità algebrica 3.

Supponiamo che sia $h \neq 1$. In tal caso f è semplice se $\dim V_h = m_h = 2$, dato che automaticamente sarà $\dim V_{2-h} = m_{2-h} = 1$. Per vedere quanto vale $\dim V_h$, bisogna sostituire nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico $T = h$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-h & 1-h \\ 0 & 1-h & 1-h \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha chiaramente rango 1, da cui segue che $\dim V_h = 3 - 1 = 2 = m_h$. Perciò, in tal caso, f è semplice e, inoltre:

$$V_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0),(0,1,-1)).$$

Cerchiamo, ora, una base di V_{2-h}, ricordandoci che $h \neq 1$:

$$\begin{pmatrix} 2h-2 & 1 & 1 \\ 0 & -1+h & 1-h \\ 0 & 1-h & -1+h \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{2-h} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2h-2)x + y + z = (-1+h)y + (1-h)z = 0\} = \mathscr{L}((1,1-h,1-h)).$$

Dunque, per $h \neq 1$, una base di autovettori è $(1,0,0), (0,1,-1), (1,1-h,1-h)$.

Sia, ora, $h = 1$. In tal caso, 1 è una autovalore di molteplicità algebrica 3 e f è semplice se $\dim V_1 = 3$. Calcoliamo questa dimensione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 1, allora sarà $\dim V_1 = 3 - 1 = 2 < 3$. Perciò, per $h = 1$, f non è semplice.

3) Per calcolare $f^{-1}(V)$ occorre calcolare $f(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-h \\ 0 & 1-h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hx + y + z \\ y + (1-h)z \\ (1-h)y + z \end{pmatrix}$$

da cui segue che $f(x,y,z) = (hx + y + z, y + (1-h)z, (1-h)y + z)$. Di conseguenza:

$$f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2-h)y + (2-h)z = 0\}.$$

Concludiamo che, se $h \neq 2$, allora $f^{-1}(V) = V$ e $\dim f^{-1}(V) = \dim V = 2$, mentre, se $h = 2$, allora $f^{-1}(V) = \mathbb{R}^3$ e $\dim f^{-1}(V) = 3$. Da questa considerazioni, segue che per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$ si ha $f(v) \in V$ per ogni $v \in V$ e questo significa precisamente che la restrizione $f|_V$ di f a V induce in endomorfismo $\varphi \colon V \to V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

4) Cominciamo con l'osservare che nel caso $h = -1$ f è invertibile, in quanto è un isomorfismo, come abbiamo visto all'inizio. Inoltre, date due basi $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$, si vede che:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f^{-1}) = (M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(f))^{-1}.$$

Scegliamo la base $\mathscr{F} = [(1,0,0),(0,1,-1),(1,2,2)]$ di autovettori trovata in precedenza, dove i primi due sono associati all'autovalore -1 e l'ultimo è associato all'autovalore 3, e prendiamo $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathscr{F}$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{F}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

da cui segue che:

$$M^{\mathscr{F}}(f^{-1}) = (M^{\mathscr{F}}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

e il piano $\alpha\colon x - y - z - 3 = 0$, determinare la retta s passante per il punto $P = (1,-1,1)$, ortogonale a r e parallela ad α e determinare il piano β passante per $Q = (1,0,1)$ e ortogonale a r. Determinare, poi, la distanza tra la retta s e il piano β.

2) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$x^2 + 2kxy + 2ky + 1 = 0,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate. Nel caso $k = 1$, determinare centro di simmetria, asintoti e assi di simmetria dell'iperbole ottenuta.

3) Studiare le quadriche di equazione:

$$x^2 + z^2 + 2kyz + 2kx + 2ky + 1 = 0,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1) I parametri direttori della retta r sono $(1,1,-1)$ e quelli del piano α sono $(1,-1,-1)$. Dunque le condizioni di ortogonalità con r e di parallelismo con il piano α diventano, per i parametri direttori (l,m,n) di s le seguenti:

$$\begin{cases} l + m - n = 0 \\ l - m - n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = l. \end{cases}$$

Ciò significa che possiamo prendere $(1,0,1)$ come parametri direttori di s. Imponendo il passaggio per il punto P, troviamo le equazioni di s:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Per quel che riguarda il piano β, la condizione di ortogonalità con la retta r ci dice che i suoi parametri direttori sono gli stessi di r, cioè $(1,1,-1)$. Possiamo, dunque, calcolare l'equazione del piano β:

$$\beta : (x-1) + y - (z-1) = 0 \Rightarrow \beta : x + y - z = 0.$$

Per quel che riguarda la distanza tra s e β, possiamo osservare che, per costruzione, sono paralleli, da cui segue che la distanza tra s e β è pari alla distanza di un punto qualsiasi di s da β. Ad esempio, possiamo prendere il punto P:

$$d(s,\beta) = d(P,\beta) = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix},$$

di modo che $|B| = -2k^2$. Dunque, vediamo che una conica spezzata è ottenuta per $k = 0$ e osserviamo che l'altra conica spezzata è quella che non si ottiene per alcun valore reale di k. Infatti, l'equazione del fascio di coniche può essere scritta in questo modo:

$$x^2 + 1 + 2k(xy + y) = 0.$$

Dunque, l'altra conica spezzata è $y(x+1) = 0$. Possiamo trovare i punti base dall'intersezione di queste due coniche:

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ y(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+i)(x-i) = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} (x+i)(x-i) = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema ci fornisce come soluzione il punto improprio $(0,1,0)$ con molteplicità 2, mentre il secondo i punti immaginari e coniugati $(i,0)$ e $(-i,0)$.

Passiamo, ora, alla classificazione delle coniche del fascio. Osserviamo che $|A| = -k^2 < 0$, per $k \neq 0$. Ciò vuol dire che tutte le coniche non spezzate del fascio sono iperboli.

Cerchiamo, ora, centro di simmetria e asintoti dell'iperbole ottenuta nel caso $k = 1$: $x^2 + 2xy + 2y + 1 = 0$. Il centro di simmetria si ottiene risolvendo il sistema associato alle prime due righe della matrice B:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 1 = 0, \end{cases}$$

da cui segue che il centro di simmetria è il punto $C = (-1,1)$. Per quel che riguarda gli asintoti, bisogna ricordare che essi sono le rette tangenti all'iperbole nei suoi punti impropri e che passano per il centro di simmetria C. Cerchiamo, dunque, tali asintoti:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2yt + t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2y) = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

I due punti impropri sono $(0,1,0)$ e $(2,-1,0)$. Come è stato detto prima, gli asintoti sono le rette che congiungono il centro di simmetria $C = (-1,1)$ con questi due punti, cioè sono le rette:

$$x = -1 \text{ e } \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow x = -1 \text{ e } x + 2y - 1 = 0.$$

Per quel che riguarda gli assi di simmetria, osserviamo che essi sono le bisettrici degli asintoti. Ricaviamo le loro equazioni dall'uguaglianza:

$$|x+1| = \frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}},$$

cioè troviamo le rette:

$$x + 1 = \frac{x+2y-1}{\sqrt{5}} \text{ e } x + 1 = -\frac{x+2y-1}{\sqrt{5}}.$$

Concludiamo, perciò, che gli assi di simmetria hanno equazioni:

$$(\sqrt{5}-1)x - 2y + \sqrt{5} + 1 = 0$$

e

$$(\sqrt{5}+1)x + 2y + \sqrt{5} - 1 = 0.$$

3) La matrice associata al fascio di quadriche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & k & 1 & 0 \\ k & k & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $|B| = k^2(k^2-2)$ e, inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = -k^2$$

Dunque, per $k = 0$, $|B| = |A| = 0$, per cui la quadrica è un cilindro oppure è spezzata. Per vedere questo è necessario vedere il rango di B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo chiaro che questa matrice ha rango 3, concludiamo che per $k = 0$ la quadrica è un cilindro.

Per $k = \sqrt{2}$ e $k = -\sqrt{2}$, $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$ e, perciò, in tali casi la quadrica è un cono.

Per $k < -\sqrt{2}$ e per $k > \sqrt{2}$, $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$. La quadrica è in questi casi un iperboloide iperbolico oppure un ellissoide immaginario. Nel caso $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$, con $k \neq 0$, $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$ e la quadrica è un iperboloide ellittico oppure un ellissoide reale. Per capire in quale caso ci troviamo dobbiamo guardare il segno degli autovalori della matrice A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & -T & k \\ 0 & k & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + 2T^2 + (k^2-1)T - k^2.$$

La quadrica è un ellissoide se gli autovalori sono tutti concordi, cioè se i coefficienti del polinomio caratteristico sono tutti concordi oppure a segno alterno. In tal caso, non ci troviamo in nessuno dei due casi, perché il primo coefficiente è negativo, il secondo positivo e il quarto è negativo. Dunque, per $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$, con $k \neq 0$, abbiamo un iperboloide ellittico e per $k < -\sqrt{2}$ e per $k > \sqrt{2}$ abbiamo un iperboloide iperbolico.