CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria**- 22 Giugno 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (1,1,1,0)$ e $v_4 = (0,-1,1,1)$ e l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_2 + v_4 \\ f(v_2) &= v_1 + v_4 \\ f(v_3) &= v_2 + hv_3 + v_4 \\ f(v_4) &= 2v_4 \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Dato il vettore $u = v_1 + (h+1)v_3 + v_4$, calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}(u) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = u\}$.

4) Dato il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, sia $g\colon V \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= v_1 - v_2 \\ g(v_2) &= v_2 - v_3 \\ g(v_3) &= v_1 - v_3 - v_4. \end{aligned}$$

Studiare l'applicazione lineare composta $\varphi = f \circ g\colon V \to \mathbb{R}^4$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Cominciamo con l'osservare che i vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti, dal momento che la matrice avente come righe le componenti dei vettori è ridotta per colonne e ha, dunque, rango pari a 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia, perciò, $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ e dal modo in cui è assegnato l'endomorfismo f possiamo subito scrivere la matrice associata a f rispetto alla base $\mathscr{A}$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dal momento che:

$$\begin{aligned}
[f(v_1)]_{\mathscr{A}} &= [v_2+v_4]_{\mathscr{A}} = (0,1,0,1)\\
[f(v_2)]_{\mathscr{A}} &= [v_1+v_4]_{\mathscr{A}} = (1,0,0,1)\\
[f(v_3)]_{\mathscr{A}} &= [v_2+hv_3+v_4]_{\mathscr{A}} = (0,1,h,1)\\
[f(v_4)]_{\mathscr{A}} &= [2v_4]_{\mathscr{A}} = (0,0,0,2).
\end{aligned}$$

Utilizzando il primo teorema di Laplace si ha che $|M^{\mathscr{A}}(f)| = -2h$, così che sappiamo subito che per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè f è sia iniettiva ($\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$) che suriettiva ($\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$). Vediamo, ora, cosa accade per $h = 0$:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui ricaviamo subito che $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 3$ e che una base di $\operatorname{Im} f$ è $[(0,1,0,1)_{\mathscr{A}}, (1,0,0,1)_{\mathscr{A}}, (0,0,0,2)_{\mathscr{A}}] = [v_2+v_4, v_1+v_4, v_4]$. Da questo segue, in particolare, che una base dell'immagine è costituita dai vettori v_1, v_2, v_4.

Per quel che riguarda il nucleo sappiamo che si trova risolvendo il sistema omogeneo associato a $M^{\mathscr{A}}(f)$ e, dunque, possiamo direttamente considerare il sistema omogeneo associato alla matrice ottenuta in precedenza riducendo $M^{\mathscr{A}}(f)$:

$$\begin{cases} y = 0\\ x+z = 0\\ 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0\\ z = -x\\ t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t)_{\mathscr{A}} \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0, z = -x, t = 0\} = \{(x,0,-x,0)_{\mathscr{A}} \in \mathbb{R}^4\} =\\
= \mathscr{L}((1,0,-1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_3) = \mathscr{L}((0,-1,-1,0)).
\end{aligned}$$

2. Per calcolare il polinomio caratteristico associato a f continuiamo a utilizzare $M^{\mathscr{A}}(f)$:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 0 & 0\\ 1 & -T & 1 & 0\\ 0 & 0 & h-T & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)(h-T)(T^2-1) = (2-T)(h-T)(T+1)(T-1).$$

Gli autovalori, dunque, sono 1, -1, 2, h e concludiamo subito che per $h \neq 1, -1, 2$ f è semplice. In tal caso, infatti, ognuno dei 4 autovalori ha molteplicità algebrica pari a 1 e, di conseguenza, tutti gli autospazi avranno dimensione 1, cioè molteplicità algebrica e molteplicità geometrica sono uguali per tutti gli autovalori.

Supponiamo, ora, che sia $h = 1$. In tal caso, -1 e 2 sono autovalori con molteplicità algebrica pari a 1 e, dunque, $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$. L'altro autovalore è 1 e $m_1 = 2$. Ne deduciamo che f è semplice se e solo se $\dim V_1 = 2$. Per vedere quanto vale questa dimensione dobbiamo porre, nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico, $h = 1$ e $T = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 3 e, dunque, $\dim V_1 = 4 - 3 = 1 < 2 = m_1$. Allora, se $h = 1$, f non è semplice.

Sia $h=-1$. In tal caso, 1 e 2 sono autovalori semplici e, quindi, $\dim V_1 = m_1 = 1$ e $\dim V_2 = m_2 = 1$. Invece, -1 ha molteplicità 2 e f sarà semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Per vedere quanto vale questa dimensione dobbiamo porre, nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico, $h=-1$ e $T=-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 3 e, dunque, $\dim V_{-1} = 4-3 = 1 < 2 = m_{-1}$. Allora, se $h=-1$, f non è semplice.

Sia $h=2$. In tal caso, -1 e 1 sono autovalori semplici e, quindi, $\dim V_1 = m_1 = 1$ e $\dim V_1 = m_1 = 1$. Invece, 2 ha molteplicità 2 e f sarà semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$. Per vedere quanto vale questa dimensione dobbiamo porre, nella matrice il cui determinante è il polinomio caratteristico, $h=2$ e $T=2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 3 e, dunque, $\dim V_2 = 4-3 = 1 < 2 = m_2$. Allora, se $h=2$, f non è semplice. Riepilogando, abbiamo visto che f è semplice solo se $h \neq 1, -1, 2$.

3. Osserviamo che $[u]_{\mathscr{A}} = [v_1 + (h+1)v_3 + v_4] = (1, 0, h+1, 1)$, così che la controimmagine $f^{-1}(u)$ si trova risolvendo il sistema avente la seguente matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{riducendo}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Se $h \neq 0$, matrice completa e incompleta hanno entrambe rango 4 e, dunque, il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \\ hz = h+1 \\ 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = \frac{h+1}{h} \\ x = -\frac{h+1}{h} \\ t = 0 \end{cases}$$

così che:

$$f^{-1}(u) = \left\{ \left(-\frac{h+1}{h}, 1, \frac{h+1}{h}, 0 \right)_{\mathscr{A}} \right\} = \left\{ -\frac{h+1}{h} v_1 + v_2 + \frac{h+1}{h} v_3 \right\} = \left\{ \left(1, \frac{2h+1}{h}, \frac{h+1}{h}, 0 \right) \right\}.$$

Se $h=0$, il sistema è equivalente a quello associato alla seguente matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

da cui segue che la matrice completa ha rango 4, mentre quella incompleta ha rango 3. Dunque, in tal caso, il sistema è impossibile, cioè:

$$f^{-1}(u) = \emptyset.$$

4. Dato che $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ è una base di V, i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e, dunque, costituiscono una base di V. Poniamo $\mathscr{B} = [v_1, v_2, v_3]$. vediamo, allora, che:

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(\varphi) = M^{\mathscr{A}}(f) \cdot M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -h & -h \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riducendo $M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(\varphi)$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & -h \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che, se $h = 0$, $\rho(M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(\varphi)) = 3$, così che $\dim \operatorname{Im} \varphi = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$. Questo vuol dire che φ è iniettiva e che una base di $\operatorname{Im} \varphi$ è $[(-1, 1, 0, 0)_{\mathscr{A}}, (1, -1, -h, 0)_{\mathscr{A}}, (0, 0, -h, -2)_{\mathscr{A}}]$, cioè $[-v_1 + v_2, v_1 - v_2 - hv_3, -hv_3 - 2v_4] = [(0, 1, 0, 0), (-h, -h-1, -h, 0), (-h, -h+2, -h-2, -h-2)]$.

Se $h = 0$, allora la matrice ridotta ottenuta a partire da $M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(\varphi)$ diventa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

da cui otteniamo che $\rho(M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(\varphi)) = 2$, cioè $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$ e una base di $\operatorname{Im} \varphi$ è $[(-1, 1, 0, 0)_{\mathscr{A}}, (0, 0, 0, -2)_{\mathscr{A}}]$, cioè $[-v_1 + v_2, -2v_4] = [(0, 1, 0, 0), (0, 2, -2, -2)]$. Per quel che riguarda il nucleo, abbiamo che $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im} \varphi = 3 - 2 = 1$ ed esso è determinato dal sistema omogeneo associato a $M^{\mathscr{B},\mathscr{A}}(\varphi)$ e, dunque, in particolare, alla matrice ridotta ottenuta in precedenza:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \varphi = \{(x, y, z)_{\mathscr{B}} \in V \mid -x + y = 0, -2z = 0\} &= \{(x, x, 0)_{\mathscr{B}} \in V\} = \\ &= \mathscr{L}((1, 1, 0)_{\mathscr{B}}) = \mathscr{L}(v_1 + v_2) = \mathscr{L}((2, 1, 0, 0)). \end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

e dato il punto $P = (1, 1, 1)$ determinare il luogo delle rette che passano per P e che formano con r un angolo di $\pi/3$.

2) Studiare, al variare del parametro reale k, il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

$$(k + 1)x^2 - 4xy + 3y^2 - 2kx - 1 = 0$$

determinandone, in particolare, le coniche spezzate. Detta p l'iperbole del fascio passante per il punto $A = (1, 0)$, determinare il suo centro di simmetria e i suoi asintoti.

3) Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il fascio di quadriche di equazione:

$$x^2 - kyz + z^2 + y - kz = 0,$$

e determinare i vertici dei due coni appartenenti al fascio.

Soluzione

1. Cominciamo col calcolare i parametri direttori della retta r e osserviamo che possiamo scrivere:

$$r : \begin{cases} z = -x \\ y = -1 \end{cases}$$

da cui otteniamo che i parametri direttori di r sono $(1, 0, -1)$. Scriviamo, ora, la generica retta passante per P:

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = 1 + nt. \end{cases}$$

Tale retta formerà un angolo di $\pi/3$ con r se vale la seguente condizione:

$$\pm \frac{l - n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow l^2 + n^2 - 4ln - m^2 = 0.$$

Sostituendo in quest'ultima equazione i parametri direttori ottenendoli dall'equazione della retta passante per P troviamo il luogo cercato:

$$(x - 1)^2 + (z - 1)^2 - 4(x - 1)(z - 1) - (y - 1)^2 = 0.$$

2. Consideriamo la matrice associata al fascio di coniche:

$$B = \begin{pmatrix} k+1 & -2 & -k \\ -2 & 3 & 0 \\ -k & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che $|B| = -3k^2 + 3k + 1$, così che vediamo che per $k = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$e $k = \frac{3-\sqrt{21}}{6}$ otteniamo coniche spezzate. Vediamo se queste sono le uniche due coniche spezzate del fascio. Per fare questo scriviamo meglio l'equazione del fascio:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 - 1 + k(x^2 - 2x) = 0$$

e notiamo che la conica $x^2 - 2x = 0$ è l'ultima conica spezzata del nostro fascio. Andiamo, ora, a classificare le rimanenti coniche:

$$|A| = \begin{vmatrix} k+1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 1,$$

da cui ricaviamo la seguente classificazione:

$$k > \frac{1}{3}, k \neq \frac{3+\sqrt{21}}{6} \rightarrow \text{ellissi}$$
$$k = \frac{1}{3} \rightarrow \text{parabola}$$
$$k < \frac{1}{3}, k \neq \frac{3-\sqrt{21}}{6} \rightarrow \text{iperboli.}$$

Cerchiamo, ora, l'iperbole passante per il punto $A = (1, 0)$:

$$k + 1 - 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 0,$$

cioè $p : x^2 - 4xy + 3y^2 - 1 = 0$. Scriviamo la matrice associata a p:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e ricordiamo che il centro di simmetria si ottiene dal sistema associato alle prime due righe di B:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

cioè il centro di simmetria è il punto $C = (0, 0)$. Gli asintoti sono le rette congiungenti il centro di simmetria con i punti impropri dell'iperbole. Andiamo, dunque, a calcolare tali punti impropri:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 - t^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\frac{y}{x} + 1 = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Dunque i punti impropri dell'iperbole sono $P^1_\infty = (1, 1, 0)$ e $P^2_\infty = (1, \frac{1}{3}, 0)$. A questo punto possiamo subito scrivere gli asintoti:

$$y = x \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{3}x.$$

3. La matrice associata al fascio di quadriche è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{k}{2} & 1 & -\frac{k}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e $|B| = \frac{k^2-1}{4}$. Andiamo a calcolare anche il determinante della sottomatrice A, che ci dice in quali casi la C_∞ è spezzata:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{2} \\ 0 & -\frac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{k^2}{4}.$$

Dunque per $k = 1$ e $k = -1$, dato che in tali casi $|A| \neq 0$, abbiamo due coni. Per $k = 0$, abbiamo un paraboloide ellittico. Per $k \neq 0, -1, 1$ possiamo solo dire che è un iperboloide ellittico o un ellissoide. Per sapere quale dei due si verifica è necessario andare a guardare al polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & 0 & 0 \\ 0 & -T & -\frac{k}{2} \\ 0 & -\frac{k}{2} & 1 - T \end{vmatrix} = (1 - T)\left(T^2 - T - \frac{k^2}{4}\right) = -T^3 + 2T^2 + \frac{k^2 - 4}{4}T - \frac{k^2}{4}.$$

Se i coefficienti del polinomio caratteristico hanno tutti lo stesso segno o sono a segni alternati, allora si tratta di un ellissoide, mentre, in caso contrario, è certamente un iperboloide. Osserviamo che, per $k \neq 0$, abbiamo $-1 < 0$, $2 > 0$ e $-\frac{k^2}{4} < 0$. Allora, possiamo concludere che i coefficienti non sono mai né tutti dello stesso segno né a segni alternati. Ciò vuol dire che per $-1 < k < 1$ e $k \neq 0$ $|B| < 0$ e abbiamo un iperboloide ellittico e per $k < -1$ e $k > 1$ $|B| > 0$ e abbiamo un iperboloide iperbolico.

Andiamo, adesso, a cercare i vertici dei due coni. Sia $k = 1$. In tal caso la matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vertice del cono si ottiene mediante il sistema associato a questa matrice:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{1}{2}y + z - \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

e, quindi, il vertice del cono ottenuto per $k = 1$ è il punto $(0, 1, 1)$. Sia, adesso, $k = -1$. In tal caso, la matrice associata al cono è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vertice del cono si ottiene dal sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}y + z + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -1 \\ y = 1, \end{cases}$$

di modo che il vertice del cono ottenuto per $k = -1$ è il punto di coordinate $(0, 1, -1)$.