CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria**- 10 Settembre 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano V e W i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ così definiti:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 2z - t = 0\},$$
$$W = \mathscr{L}((h, 0, 0, 0), (0, h, 1, 0)),$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Calcolare $V + W$ e $V \cap W$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, precisando se la somma è diretta o meno.
2) Studiare l'endomorfismo di $f \colon V \to V$ definito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,0,0,1) &= (-k, 1, 2, -k+2) \\ f(0,1,0,-2) &= (0, k, 1, -2k+2) \\ f(0,0,1,2) &= (0, 2, k+1, 2k-2) \end{aligned}$$

   al variare di $k \in \mathbb{R}$.
3) Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$.
4) Data la base $\mathscr{B} = [(1,0,0,1), (0,1,0,-2), (0,0,1,2)]$ di V, diagonalizzare $M^{\mathscr{B}}(f)$ nel caso $k = 0$.

Soluzione

1) Se $h = 0$, allora $W = \mathscr{L}((0,0,1,0))$ e, dato che $(0,0,1,0) \notin V$, dal momento che non soddisfa la sua equazione cartesiana, allora $V + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che contiene propriamente V, che ha dimensione 3. Dunque, l'unica possibilità è che $V + W = \mathbb{R}^4$. In tal caso, dalla formula di Grassmann:

$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 3 + 1 - 4 = 0$$

   da cui segue che $V \cap W = \{(0,0,0,0)\}$. Questo ci dice che nel caso $h = 0$ la somma $V + W$ è diretta.
   Se $h \neq 0$, allora:

$$W = \mathscr{L}((1,0,0,0), (0,1,h,0))$$

   e, dato che $(1,0,0,0) \notin V$, allora, come prima, $V + W = \mathbb{R}^4$. In tal caso, però:

$$\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

   Cerchiamo le equazioni cartesiane di W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & y - hz & 0 & t \end{pmatrix},$$

   da cui segue che:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - hz = t = 0\},$$
$$\Rightarrow V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 2z - t = 0, y - hz = 0, t = 0\} = \mathscr{L}((2h-2, h, 1, 0)).$$

2) Considerati i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,-2)$, $v_3 = (0,0,1,2)$, si vede facilmente che questi tre vettori sono linearmente indipendenti e che appartengono a V, che ha dimensione 3. Dunque essi costituiscono una base $\mathscr{B}$ di V. Cerchiamo le componenti del generico vettore di V rispetto a tale base:

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = x - 2y + 2z\}.$$

Le componenti di $(x,y,z,x-2y+2z)$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ di V sono determinate dalla terna (a,b,c) tale che:

$$(x,y,z,x-2y+2z) = av_1 + bv_2 + cv_3$$

$$\Rightarrow (x,y,z,x-2y+2z) = a(1,0,0,1) + b(0,1,0,-2) + c(0,0,1,2) = (a,b,c,a-2b+2c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z \end{cases},$$

cioè $(x,y,z,x-2y+2z)_{\mathscr{B}} = (x,y,z)$. Ciò significa che:

$$\begin{aligned}
[f(v_1)]_{\mathscr{B}} &= [(-k,1,2,-k+2)]_{\mathscr{B}} = (-k,1,2) \\
[f(v_2)]_{\mathscr{B}} &= [(0,k,1,-2k)]_{\mathscr{B}} = (0,k,1) \\
[f(v_3)]_{\mathscr{B}} &= [(0,2,k+1,2k+2)]_{\mathscr{B}} = (0,2,k+1).
\end{aligned}$$

Dunque:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |M^{\mathscr{B}}(f)| = -k(k^2+k-2).$$

Allora, per $k \neq 0, 1, -2$, f è un isomorfismo.

Sia $k = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{B}}(f)) = 2$$

e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(v_2 + 2v_3, v_3) = \mathscr{L}((0,1,2,-2),(0,0,1,2))$. Per il nucleo:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c), a + 2b = 0, b - 3c = 0\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (-2b, b, 3c)\} = \mathscr{L}(-2v_1 + v_2 + 3v_3) = \mathscr{L}((-2,1,3,0).$$

Se $k = 1$, allora:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{B}}(f)) = 2$$

e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(-v_1 + v_2 + 2v_3, v_2 + v_3) = \mathscr{L}((-1,1,2,-1),(0,1,1,0))$. Per il nucleo:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c), -a = 0, b + 2c = 0\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (0, -2c, c)\} = \mathscr{L}(-2v_2 + v_3) = \mathscr{L}((0,-2,1,-2).$$

Se $k = -2$, allora:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{B}}(f)) = 2$$

e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(2v_1 + v_2 + 2v_3, -2v_2 + v_3) = \mathscr{L}((2,1,2,4),(0,-2,1,6))$. Per il nucleo:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c), 2a = 0, -2b + 2c = 0\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (0,b,b)\} = \mathscr{L}(v_2 + v_3) = \mathscr{L}((0,1,1,0).$$

3) Il polinomio caratteristico di f è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} -k-T & 0 & 0 \\ 1 & k-T & 2 \\ 2 & 1 & k+1-T \end{vmatrix} = (-k-T)[T^2 - (2k+1)T + k^2 + k - 2].$$

Dunque, i tre autovalori di f sono $-k, k+2, k-1$. Essi sono distinti per $k \neq -1, \frac{1}{2}$ e, perciò, per tali valori di k f è semplice.

Sia, ora, $k = -1$. In tal caso, 1 è autovalore di molteplicità algebrica 2 e -2 è autovalore di molteplicità algebrica 1. Perciò f è semplice se la molteplicità geometrica di 1, cioè la dimensione dell'autospazio V_1, è anch'essa pari a 2. Per trovare la dimensione dell'autospazio dobbiamo sostituire nella matrice il cui determinante ci da il polinomio caratteristico i valori $k = -1$ e $T = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, allora $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < 2$. Perciò, per $k = -1$ f non è semplice.

Sia, ora, $k = \frac{1}{2}$. In tal caso, $-\frac{1}{2}$ è autovalore di molteplicità algebrica 2 e $\frac{5}{2}$ è autovalore di molteplicità algebrica 1. Perciò f è semplice se la molteplicità geometrica di $-\frac{1}{2}$, cioè la dimensione dell'autospazio $V_{-\frac{1}{2}}$, è anch'essa pari a 2. Per trovare la dimensione dell'autospazio dobbiamo sostituire nella matrice il cui determinante ci da il polinomio caratteristico i valori $k = \frac{1}{2}$ e $T = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice ha rango 2, allora $\dim V_{-\frac{1}{2}} = 3 - 2 = 1 < 2$. Perciò, per $k = \frac{1}{2}$ f non è semplice.

4) Per $k = 0$, abbiamo visto che i tre autovalori sono distinti e che f è semplice. Per diagonalizzare la matrice di f abbiamo bisogno degli autospazi di f. Per $k = 0$ gli autovalori sono $0, 2, -1$ e la matrice è:

$$M^{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che:

$$V_0 = \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}(-2v_1 + v_2 + v_3).$$

Calcoliamo gli altri autospazi. Per l'autovalore -1 abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{-1} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c), a = 0, a + b + 2c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (0,-2c,c)\} = \mathscr{L}(-2v_2 + v_3).$$

Per l'autovalore 2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (a,b,c), -2a = 0, a-2b+2c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{B}} = (0,c,c)\} = \mathscr{L}(v_2+v_3).$$

Allora, possiamo concludere che:

$$P^{-1}M^{\mathscr{B}}(f)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dove P è la matrice avente come colonne le componenti di una base di autovettori rispetto alla base $\mathscr{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

e il punto $P=(1,0,0)$, determinare il luogo delle rette passanti per P che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z=0$ tangenti alla retta $s: x-y=0$ nel punto $A=(1,1)$ e passanti per $B=(0,1)$ e per $C=(0,2)$. Detta c la circonferenza del fascio, determinare la retta tangente a c nel punto $(1,2)$.

3) Determinare e studiare le quadriche aventi come conica all'infinito la conica Γ di equazioni:

$$\begin{cases} x^2+y^2-yz=0 \\ t=0, \end{cases}$$

e passanti per i punti $A=(1,0,0)$, $B=(-1,0,0)$ e $C=(1,-1,0)$.

Soluzione

1) La retta r ha parametri direttori $(1,1,0)$ e la generica retta passante per $P=(1,0,0)$ ha equazioni:

$$\begin{cases} y=m(x-1) \\ z=n(x-1) \end{cases}$$

con $(1,m,n)$ come parametri direttori. Perché tale retta formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con r deve essere:

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{1+m}{\sqrt{1+m^2+n^2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+m^2+n^2} = \pm\sqrt{(2)}(1+m) \Rightarrow m^2-n^2+4m+1=0.$$

Dalle equazioni della generica retta per P ricaviamo che:

$$\begin{cases} m=\frac{y}{x-1} \\ n=\frac{z}{x-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{z}{x-1}\right)^2 + 4\frac{y}{x-1} + 1 = 0 \Rightarrow y^2-z^2+4y(x-1)+(x-1)^2=0.$$

Questo è il luogo dei punti cercato.

2) Le coniche spezzate del fascio sono soltanto due e precisamente sono la conica spezzata nell'unione delle rette s e BC e la conica spezzata nell'unione delle rette AB e AC. Dunque, il nostro fascio di coniche ha equazione:

$$\lambda(x-y)x + \mu(y-1)(x+y-2) = 0,$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ parametri non entrambi nulli. Supponiamo $\mu \neq 0$, di modo che escludiamo la conica spezzata $s \cap BC$, e, posto $h = \frac{\lambda}{\mu}$, scriviamo il fascio:

$$hx^2 + (1-h)xy + y^2 - x - 3y + 2 = 0.$$

La matrice associata al fascio è:

$$B = \begin{pmatrix} h & \frac{1-h}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1-h}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che conosciamo già le coniche spezzate del fascio, possiamo passare subito al calcolo del $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} h & \frac{1-h}{2} \\ \frac{1-h}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 6h - 1}{4}.$$

Dunque:

$$3 - 2\sqrt{2} < h < 3 + 2\sqrt{2},\ h \neq 0 \Rightarrow \text{è una ellisse},$$
$$h = 3 - 2\sqrt{2} \text{ oppure } h = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{è una parabola},$$
$$h < 3 - 2\sqrt{2} \text{ oppure } h > 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{iperboli}.$$

In particolare, se $h = 1$, abbiamo una circonferenza, mentre se $h = -1$, abbiamo un'iperbole equilatera.

La circonferenza del fascio ha equazione $x^2 + y^2 - x - 3y + 2 = 0$ e la sua matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

L'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto $(1, 2)$ è determinata dal prodotto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} & 2 - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} - 3 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Questo significa che la retta tangente ha equazione:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0.$$

3) Le quadriche contenenti la conica Γ hanno equazione:

$$x^2 + y^2 - yz + t(ax + by + cz + dt = 0,$$

che scritta in coordinate cartesiane diventa:

$$x^+ y^2 - yz + ax + by + cz + d = 0.$$

Imponiamo il passaggio per i punti:

$$\begin{cases} 1 + a + d = 0 \\ 1 - a + d = 0 \\ a - b + d + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ d = -1. \end{cases}$$

Le nostre quadriche hanno, dunque, equazione:

$$x^2 + y^2 - yz + y + cz - 1 = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{c}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

e si vede che:

$$|B| = -\frac{1}{4}(c^2 + c - 1).$$

Inoltre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Se $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < c < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, allora $|B| > 0$ e, dato che, $|A| \neq 0$, abbiamo un iperboloide iperbolico. Se $c = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ oppure $c = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, dato che $|A| \neq 0$, abbiamo un cono. Se $c < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ oppure $c > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, dato che $|A| \neq 0$, allora abbiamo un iperboloide ellittico oppure un ellissoide. Dal momento che il punto a coordinate reali $(0,0,1,0) \in \Gamma$, concludiamo che la C_∞ della quadrica è a punti reali e, dunque, abbiamo un iperboloide ellittico.

Alternativamente, è sufficiente guardare gli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - T - \frac{1}{4}).$$

Gli autovalori sono, dunque, 1, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ e, dato che di questi due sono positivi e uno è negativo, concludiamo che negli intervalli $c < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $c > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, abbiamo degli iperboloidi ellittici.