Ingegneria Civile, Gestionale, del Recupero Edilizio Ambientale. Compito di **Geometria** del 6/12/08

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le immagini

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (4h-3, 2h, 0) \\ f(0,1,1) = (4h-4, 2h+1, -1) \\ f(1,0,1) = (2h-1, h-2, 2) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

1) Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Determinare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(2,1,-1) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (2,1,-1)\}$$

3) Dato il sottospazio $V = \{(x,y,z) \mid x - 2y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ determinare, al variare di h, il sottospazio

$$f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

verificando che $f(V) \subseteq V$. Dire in quali casi $f(V) = V$.
4) Verificare che f è semplice per ogni valore di h e determinare una base indipendente dal parametro.

II

1) Sono dati nello spazio un piano α ed un punto $P \notin \alpha$. Detta $\mathbf{s}$ la generica retta passante per P che forma con α un angolo di $\frac{\pi}{4}$, determinare la quadrica Q luogo delle rette $\mathbf{s}$. Verificare che le coniche sezione Γ di Q col generico piano parallelo ad α sono circonferenze. Verificare che i piani passanti per P ed ortogonali ad α secano Q in coniche spezzate in due rette ortogonali.
2) È assegnato nel piano un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x},\vec{y},u$.
Determinare la parabola $\mathbf{p}$ che ha vertice $V \equiv (1,1)$, punto improprio $(1,1,0)$ e passa per il punto $(3,1)$ e la circonferenza $\mathbf{c}$ di centro O e raggio $\sqrt{2}$. Studiare il fascio di coniche generato da $\mathbf{p}$ e da $\mathbf{c}$, determinandone in particolare i punti base e le coniche spezzate.
3) È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u$.
Studiare, al variare del parametro h, le quadriche di equazione

$$x^2 - 2hxy + z^2 - 1 = 0$$

SVOLGIMENTO

I

1) Con tecniche standard si determina facilmente la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica, della quale calcoliamo il rango: $M(f) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2h-2 & 2h-2 \\ -1 & h+2 & h-1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2h-2 & 2h-2 \\ 0 & 3h & 3(h-1) \\ 0 & -2h & 3-2h \end{pmatrix} \overset{h\neq 0}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2h-2 & 2h-2 \\ 0 & h & h-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi per $h \neq 0$ si ha un isomorfismo. Per $h = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \operatorname{Ker} f = \{(2y, y, 0)\} \\ \\ \operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0,1,-1),(1,0,0)) \end{array}$$

2) Ripetiamo sulla matrice completa la riduzione già effettuata sulla matrice $M(f)$

$$(A,B)^{h\neq 0} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2h-2 & 2h-2 & 2 \\ 0 & h & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(2,1,-1) = \{(2,1,-1)\}$$

in particolare il vettore $(2,1,-1)$ è autovettore rispetto all'autovalore 1. Per $h=0$ si ha

$$(A,B) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(2,1,-1) = \{(2y,y,-1)\}$$

3) $V = \{(2y,y,z)\}$ ha base $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ quindi

$$f(V) = \mathscr{L}(f(v_1) = (2h,h,0),\ f(v_2) = (2h-2,h-1,1)) \subseteq V$$

in quanto $f(v_1) \in V$ e $f(v_2) \in V$. Osserviamo che per $h \neq 0$ i due vettori sono indipendenti, quindi $f(V) = V$; per $h = 0$ $f(v_1) = 0$, quindi $f(V) = \mathscr{L}(2,1,-1) \subsetneq V$.
4) Siccome conosciamo un autovalore ($T=1$) possiamo evitare il calcolo esplicito del polinomio caratteristico

$$P(T) = -T^3 + (h+4)T^2 + \lambda T + 3h = 0 \quad P(1) = 0 \ \Rightarrow \lambda = -4h-3$$

e risolvendo con la regola di Ruffini $P(T) = -(T-1)(T-3)(T-h)$. Per $h \neq 1,3$ l'endomorfismo è semplice; in questo caso calcoliamo gli autospazi.
$T = 1 \quad V_1 = \mathscr{L}(u_1 = (2,1,-1))$ come avevamo già visto;
$T = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2h-2 & 2h-2 \\ -1 & h-1 & h-1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow V_3 = \{(0,y,-y)\} \text{ con base } u_2 = (0,1,-1)$$

$T = h$

$$\begin{pmatrix} 1-h & 2h-2 & 2h-2 \\ -1 & 2 & h-1 \\ 1 & -2 & 1-h \end{pmatrix} \Rightarrow V_h = \{(2y,y,0)\} \text{ con base } u_3 = (2,1,0)$$

Siccome abbiamo una base di autovettori indipendente da h, f è semplice anche nei casi particolari $h = 1,3$.

II

1) Assegnamo il sistema di riferimento nel seguente modo: l'asse $\vec{z}$ è la retta per P ortogonale ad α, con $O \in \alpha$, verso da O a P, gli assi $\vec{x}$ ed $\vec{y}$ orientati coerentemente sul piano α; infine assumiamo $u = OP$ ome unità di misura. Con questa scelta il piano α ha equazione $z = 0$ ed il punto P ha coordinate $P \equiv (0,0,1)$. Perché che la retta generica $\mathbf{s}$ per P abbia la direzione richiesta essa deve formare con l'asse $\vec{z}$ un angolo di $\frac{\pi}{4}$, quindi si ha

$$\mathbf{s}: \begin{cases} x = m(z-1) \\ y = n(z-1) \end{cases} \qquad S_\infty \equiv (m,n,1,0) \ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow \ m^2+n^2-1 = 0$$

ed eliminando i parametri m ed n si trova l'equazione di Q

$$Q:\ x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$$

Si verifica facilmente che Q è un cono di vertice P, quindi tra i piani paralleli ad α, di equazione $z = k$, quello passante per P, di equazione $z = 1$, seca Q in una conica spezzata. Supponiamo quindi $k \neq 1$.

$$\Gamma : \begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = (k-1)^2 \end{cases}$$

Si riconosce facilmente che Γ è una circonferenza di centro $(0, 0, k)$ e raggio $|k - 1|$. Infine, secando Q col generico piano contenente l'asse $\vec{z}$ si ha

$$\begin{cases} x = hy \\ (1 + h^2)y^2 - (1 - z)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = hy \\ (\sqrt{1 + h^2}\, y + z - 1)(\sqrt{1 + h^2}\, y - z + 1) = 0 \end{cases}$$

Le due rette in cui questa conica si spezza hanno punti impropri

$$(h, 1, -\sqrt{1 + h^2}, 0),\ (h, 1, \sqrt{1 + h^2}, 0)$$

che sono ortogonali.

2) L'asse di $\mathbf{p}$ è la prima bisettrice $x - y = 0$, quindi la tangente nel vertice V è la retta $x + y - 2 = 0$. Nel fascio (siamo nel caso della bitangenza) di coniche

$$(x - y)^2 + k(x + y - 2) = 0$$

imponendo il passaggio per il punto $(3, 1)$ si ha $4 + 2h = 0$, quindi $h = -2$:

$$\mathbf{p} :\ x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$$

. La circonferenza $\mathbf{c}$ ha equazione $x^2 + y^2 - 2 = 0$ quindi il fascio da studiare ha equazione

$$\varphi :\ (1 + h)x^2 - 2xy + (1 + h)y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+h & -1 & -1 \\ -1 & 1+h & -1 \\ -1 & -1 & 4-2h \end{pmatrix} \qquad |B| = -h^3 + 3h - 2 = -(h - 1)^2(h + 2)$$

Per $h = 1$ Si ottiene la conica

$$x^2 - (y + 1)x + y^2 - y + 1 = 0 \quad \Delta = -3(y - 1)^2 < 0$$

spezzata in due rette immaginarie coniugate. Per $h = -2$ si ha la conica

$$(x + y)^2 + 2(x + y) - 8 = 0 \quad (x + y + 1)^2 - 9 = 0$$

spezzata nelle rette $x + y - 2 = 0$, $x + y + 4 = 0$. Secando con queste rette la circonferenza $\mathbf{c}$ si hanno i punti $(1, 1)$ doppio, $(-2 \pm i\sqrt{3}, -2 \mp \sqrt{3})$. Per studiare le coniche irriducibili di φ consideriamo $|A| = h^2 + 2h$

$|A| > 0$ $h < -2$, $h > 0$. ELLISSI. Per $h = \infty$ si trova la circonferenza $\mathbf{c}$.

$|A| < 0$ $-2 < h < 0$. IPERBOLI. Per $h = -1$ si ha l'iperbole equilatera $xy + x + y - 3 = 0$.

$|A| = 0$ $h = -2, 0$. Per $h = 0$ si trova la parabola $\mathbf{p}$.

3) Dalla matrice B associata alla quadrica

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = -|A| = h^2$$

Per $h = 0$ $\rho(B) = 3$, la quadrica è un cilindro di vertice $Y_\infty \equiv (0, 1, 0, 0)$. Per $h \neq 0$ si ha una quadrica non degenere, che non è un paraboloide. Con riferimento all'equazione ridotta $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$, in cui $\delta = -\frac{|B|}{|A|} > 0$, determiniamo i segni degli autovalori di A: dal polinomio caratteristico

$$(1 - T)(T^2 - T - h^2)$$

si vede che ci sono due autovalori positivi ed uno negativo, quindi la quadrica è un iperboloide iperbolico.