CdL in Ingegneria Gestionale e
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria**- 24 Settembre 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. COMPITO A

I

In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $u_1 = (1,2,1,0)$, $u_2 = (1,1,1,,0)$, $u_3 = (0,2,1,1)$, i sottospazi $U = \mathscr{L}(u_1, u_2, u_3)$ e $V = \{(x,y,z,t) \mid x - z + kt = 0\}$ e l'applicazione lineare $f \colon U \to V$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (1,4,k+1,1) \\ f(u_2) &= (k,k,k,0) \\ f(u_3) &= (0,4,2k,2) \end{aligned}$$

con k parametro reale.

1) Studiare l'applicazione lineare f al variare di k, determinando $Im\ f$ e $Ker\ f$.
2) Determinare, al variare di k, i sottospazi $U + V$ e $U \cap V$.
3) Determinare il valore di k per cui f induce un endomorfismo $f' \colon U \to U$.
4) Studiare la semplicità di f', determinando, se possibile, una base di autovettori.
5) Definire un endomorfismo $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a U induce f' e che abbia due autospazi di dimensione 2.

Risoluzione

1) Cominciamo con l'osservare che $\dim U = 3$, dal momento che i tre vettori u_1,u_2,u_3 sono linearmente indipendenti. Infatti mettendo i tre vettori in matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vediamo riducendo che $\rho(A) = 3$. Dunque, $\mathscr{A} = [u_1, u_2, u_3]$ è una base di U. Notiamo, poi, che:

$$V = \{(x, y, x + kt, t) | x, y, t \in \mathbb{R}\},$$

così che, se $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,k,1)$, allora $\mathscr{B} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V.

Per scrivere la matrice di f abbiamo bisogno delle componenti di $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ rispetto alla base $\mathscr{B}$. Dato che:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (1,4,1+k,1) = v_1 + 4v_2 + v_3 = (1,4,1)_{\mathscr{B}} \\ f(u_2) &= (k,k,k,0) = kv_1 + kv_2 = (k,k,0)_{\mathscr{B}} \\ f(u_3) &= (0,4,2k,2) = 4v_2 + 2v_3 = (0,4,2)_{\mathscr{B}}. \end{aligned}$$

allora:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 4 & k & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A questo punto, dato che $|A| = -2k$, vediamo che, per $k \neq 0$, f è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali U e V, mentre, se $k = 0$, la matrice diventa:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $Im\ f = \mathscr{L}((1,4,1)_{\mathscr{B}}, (0,4,2)_{\mathscr{B}}) = \mathscr{L}((1,4,1,1),(0,4,0,2))$ e $Ker\ f = \{(x,y,z)_{\mathscr{A}} \mid x = z = 0\} = \{(0,y,0)_{\mathscr{A}}\} = \mathscr{L}((0,1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(u_2) = \mathscr{L}((1,1,1,0))$.

2) Dato che $U = \mathscr{L}(u_1, u_, u_3)$ e $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, allora $U + V = \mathscr{L}(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$. Per determinare una base di $U + V$ dobbiamo mettere in matrice questi vettori e ridurre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora, se $k \neq 1$, questa matrice ha rango 4 e, quindi, $\dim(U + V) = 4$, cioè $U + V = \mathbb{R}^4$. Se $k = 1$, questa matrice ha rango 3 e ciò significa che $v_1, v_2, v_3 \in \mathscr{L}(u_1, u_2, u_3) = U$ e sarebbe a dire che $V = U$, da cui segue che $U + V = U$.

Passiamo, adesso, a determinare $U \cap V$. Per fare questo abbiamo bisogno dell'equazione cartesiana di U. La ricaviamo dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-z+x \end{pmatrix}$$

e, dunque, $U = \{(x,y,z,t) \mid x - z + t = 0\}$ e ciò riconferma il fatto che, per $k = 1$, $V = U$. Allora, chiaramente, se $k = 1$, $U \cap V = U$, mentre se $k \neq 1$, $U \cap V = \{(x,y,z,t) \mid x - z + kt = x - z + t = 0\} = \{(x,y,z,t) \mid t = x - z = 0\}$.

3) f induce un endomorfismo $f' \colon U \to U$ se $f(u) \in U$ per ogni vettore $u \in U$. Allora basta vedere quando $f(u_1), f(u_2), f(u_3) \in U$, cioè quando questi tre vettori soddisfano l'equazione cartesiana di U:

$$f(u_1) \in U \iff 1 - 1 + k + 1 = 0 \iff k = 1,$$
$$f(u_2) \in U \iff k - k + 0 = 0 \leftarrow \text{sempre verificata},$$
$$f(u_3) \in U \iff 0 - 2k + 2 = 0 \iff k = 1.$$

Dunque, per $k = 1$ f induce un endomorfismo $f' \colon U \to U$ definito da $f'(u) = f(u)$ per ogni $u \in U$.

4) Dobbiamo, innanzitutto, trovare $M^{\mathscr{A}}(f')$. Si vede che:

$$f'(u_1) = f(u_1) = (1,4,2,1) = u_1 + u_3 = (1,0,1)_{\mathscr{A}}$$
$$f'(u_2) = f(u_2) = (1,1,1,0) = u_2 = (0,1,0)_{\mathscr{A}}$$
$$f'(u_3) = f(u_3) = (0,4,2,2) = 2u_3 = (0,0,2)_{\mathscr{A}}$$

da cui segue che:

$$M^{\mathscr{A}}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, il polinomio caratteristico è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 0 \\ 1 & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (1-T)^2(2-T),$$

da cui vediamo che abbiamo due autovalori, 1 e 2, con, rispettivamente, molteplicità 2 e 1.

Se $T=1$, allora l'autospazio V_1 è determinato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che $\dim V_1 = 2$ e, di conseguenza, f' è semplice. Cerchiamo, ora, una base di autovettori e vediamo che $V_1 = \{(x,y,z)_{\mathscr{A}} \mid x = -z\} = \{(-z,y,z)_{\mathscr{A}}\} = \mathscr{L}((-1,0,1)_{\mathscr{A}}, (0,1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(-u_1+u_3, u_2) = \mathscr{L}((-1,0,0,1),(1,1,1,0))$.

Se $T=2$, l'autospazio V_2 è determinato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che $V_2 = \{(x,y,z)_{\mathscr{A}} \mid x = y = 0\} = \{(0,0,z)_{\mathscr{A}}\} = \mathscr{L}((0,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(u_3) = \mathscr{L}((0,2,1,1))$.

Se poniamo, allora, $u_1' = (-1,0,0,1)$, $u_2' = (1,1,1,0)$ e $u_3' = (0,2,1,1)$, vediamo che $[u_1', u_2', u_3']$ è una base di autovettori per f'.

5) Sappiamo che un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che induce f' è tale che:

$$\begin{aligned} \varphi(u_1') &= f'(u_1') = u_1' \\ \varphi(u_2') &= f'(u_2') = u_2' \\ \varphi(u_3') &= f'(u_3) = 2u_3'. \end{aligned}$$

Inoltre, possiamo trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori u_1', u_2', u_3', w, con w vettore non appartenente a U e, dunque, φ è assegnato una volta che assegnamo $\varphi(w)$. Si vede che è possibile prendere $w = (1,0,0,0)$, dal momento che la seguente matrice ha rango 4:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto, se poniamo $\varphi(w) = 2w$, abbiamo un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che induce f' e che ha due autospazi di dimensione 2, cioè $\mathscr{L}(u_1', u_2')$ e $\mathscr{L}(u_3', w)$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Siano date le rette:

$$r: \begin{cases} x = z-1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{e} \quad r': \begin{cases} x = -y \\ y = -z+1 \end{cases}$$

1) Verificare la complanarità di r e r'.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche ϕ tangenti a $s: z = x+y-1 = 0$ e $s': z = x+y+1 = 0$ rispettivamente nei punti $A(1,0,0)$ e $B(-1,0,0)$. In particolare determinare l'iperbole equilatera γ di tale fascio.

3) Giustificare perché tra le quadriche contenenti γ non possono esserci né ellissoidi, né paraboloidi ellittici, né cilindri parabolici o ellittici.

4) Determinare e studiare la totalità delle quadriche contenenti la conica di equazioni $(x-y)^2+2x+2y=z=0$ e le rette ortogonali al piano $z=0$ e passanti per $C(-2,0,0)$ e $D(0,-2,0)$.

Risoluzione

1) Le rette r e r' sono complanari se hanno un punto in comune, proprio o improprio, e, dunque, nel nostro caso, il sistema:

$$\begin{cases} x-z+t=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \\ y+z-t=0 \end{cases}$$

deve ammettere una soluzione. Questo accade se il determinante della matrice incompleta associata al sistema è 0. Dunque dobbiamo calcolare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1+1-1=0.$$

Le rette sono davvero complanari.

2) Il fascio ϕ di coniche è generato dalle seguenti coniche spezzate:

- $s \cup s'$
- la retta congiungente i punti A e B contata due volte.

Dunque, il fascio ha equazione:

$$\lambda(x+y-1)(x+y+1)+\mu y^2=0,$$

che scriviamo, supponendo $\lambda \neq 0$ ed escludendo la conica spezzata $y^2=0$, posto $h=\frac{\mu}{\lambda}$:

$$(x+y-1)(x+y+1)+hy^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+(h+1)y^2+2xy-1=0.$$

La matrice associata a ϕ è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\det B=-h$, $\det A=h$ e $Tr(A)=h+2$. Dunque:

- se $h<0$, abbiamo iperboli e, in particolare, per $h=-2$ abbiamo un'iperbole equilatera;
- se $h=0$, abbiamo una conica spezzata; l'altra era quella esclusa inizialmente, di equazione $y^2=0$;
- se $h>0$, abbiamo ellissi.

Perciò, γ ha equazione $x^2-y^2+2xy-1=0$.

3) Un ellissoide contiene esclusivamente ellissi e coniche spezzate in due rette immaginarie e coniugate, un paraboloide ellittico parabole, ellissi e coniche spezzate in due rette immaginarie e coniugate, un cilindro parabolico parabole o coniche spezzate in due rette reali e coincidenti, un cilindro ellittico ellissi e coniche spezzate in due rette reali e coincidenti. Appare evidente, allora, che nessuna di queste quadriche può contenere l'iperbole γ.

4) La generica quadrica contenente la conica assegnata ha equazione:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0,$$

mentre le rette passanti per A e B e ortogonali al piano $z = 0$ hanno equazioni:

$$r_A : \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_B : \begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \end{cases}$$

La quadrica, per contenere r_A, deve contenere ogni suo punto. Imponiamo, quindi, il passaggio per il generico punto di r_A che ha coordinate $(-2, 0, \alpha)$:

$$4 - 4 + \alpha(-2a + c\alpha + d) = 0 \Rightarrow \alpha(c\alpha + d - 2a) = 0.$$

Questa deve essere un'identità per ogni valore di α e questo avviene per $c = 0$ e $d = 2a$. Procediamo nello stesso modo per r_B: la quadrica, per contenere r_B, deve contenere ogni suo punto. Imponiamo, quindi, il passaggio per il generico punto di r_B che ha coordinate $(0, -2, \beta)$:

$$4 - 4 + \beta(-2b + c\beta + d) = 0 \Rightarrow \beta(c\beta + d - 2b) = 0.$$

Questa deve essere un'identità per ogni valore di β e questo avviene per $c = 0$ e $d = 2b$. Riepilogando, deve essere:

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 2a \\ d = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = a \\ d = 2a. \end{cases}$$

Otteniamo, perciò, questo fasci di quadriche:

$$x^2 + y^2 - 2xy + axz + ayz + 2x + 2y + 2az = 0.$$

La matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{a}{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{a}{2} & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 & a \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

così che $\det B = 4a^2 \geq 0$ e $\det A = -a^2$. Perciò, se $a \neq 0$, abbiamo un iperboloide iperbolico. Se $a = 0$, possiamo avere un cilindro iperbolico o una quadrica spezzata. Dobbiamo andare a guardare il rango di B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\xrightarrow{\text{riducendo}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $\rho(B) = 3$ e, per $a = 0$, abbiamo un cilindro iperbolico.