CdL in Ingegneria Gestionale e
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria**- 18 Giugno 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. COMPITO A

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $W = L(v_1, v_2, v_3)$, con $v_1 = (1, 0, 1, -1)$, $v_2 = (h, 1, 0, 1,)$, $v_3 = (0, -h, 1, 0)$, $h \in \mathbb{R}$ e $V = \{(x, y, z, t) \mid z = t = 0\}$.

1) Verificare che per ogni $h \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^4 = V + W$.

2) Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Sia, adesso, $h = 0$ e si condiseri l'endomorfismo $f : W \to W$ definito da:

$$\begin{cases} f(v_1) = (1-k)v_1 \\ f(v_2) = (1-2k)v_1 + kv_2 \\ f(v_3) = (1-3k)v_1 + (k-1)v_2 + v_3. \end{cases}$$

3) Verificare che f è semplice per ogni $k \in \mathbb{R}$ e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.

4) Sia $g : W \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$g(v_1) = f(v_1)$$
$$g(v_2) = f(v_2)$$
$$g(v_3) = f(v_3).$$

Studiare tale applicazione al variare di k, determinando in ciascun caso una base di $\operatorname{Ker} g$ e $\operatorname{Im} g$.

Risoluzione

1) Dal momento che $W = L(v_1, v_2, v_3)$ e $V = \{(x, y, z, t) \mid z = t = 0\} = \{(x, y, 0, 0)\} = L(e_1, e_2)$, essendo $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ed $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, allora $V + W = L(e_1, e_2, v_1, v_2, v_3)$. Per verificare che $V + W = \mathbb{R}^4$ è sufficiente verificare che $\dim(V + W) = 4$, cioè verificare che il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ h & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -h & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è 4. Infatti, riducendo per righe arriviamo alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 4.

2) La prima cosa da fare per sapere quando $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ è cercare una base di W, dal momento che una base di V è $[e_1, e_2]$. Per fare questo riduciamo per righe la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ h & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -h & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

arrivando a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ h+1 & 1 & 1 & 0 \\ -h-1 & -h-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, se $h \neq -1$, $\dim W = 3$, così che $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 2+3-4 = 1$. Questo vuol dire che $V \cap W \neq \{\underline{0}\}$ e dunque la somma $V + W$ non è diretta.

Se $h = -1$, $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 2+2-4 = 0$. Dunque, $V \cap W = \{\underline{0}\}$, il che vuol dire che la somma di V e W è diretta e, dunque, $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

3) Sia $h = 0$. In tal caso, come abbiamo visto nel punto 2, $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di W, dove adesso $v_1 = (1,0,1,-1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1,0)$. Quindi:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1-k & 1-2k & 1-3k \\ 0 & k & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

così che $P(T) = (1-k-T)(k-T)(1-T)$ e gli autovalori sono $1-k, k, 1$. Per $k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ gli autovalori sono distinti tra loro e, dunque, f è semplice e possiamo cercare una base di autovettori.

Sia $T = 1-k$. L'autospazio V_{1-k} è determinato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-2k & 1-3k \\ 0 & 2k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

che ci porta al sistema:

$$\begin{cases} (1-2k)y' + (1-3k)z' = 0 \\ (2k-1)y' + (k-1)z' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \overset{k\neq 0,\frac{1}{2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Questo vuol dire che $V_{1-k} = \{(x', y', z')_{\mathscr{A}} \mid y' = z' = 0\} = \{(x', 0, 0)_{\mathscr{A}}\} = L(v_1) = L((1,0,1,-1))$.

Sia $T = k$. L'autospazio V_k è determinato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1-2k & 1-2k & 1-3k \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

che ci porta al sistema:

$$\begin{cases} (1-2k)x' + (1-2k)y' + (1-3k)z' = 0 \\ (k-1)z' = 0 \\ (1-k)z' = 0 \end{cases} \overset{k\neq \frac{1}{2},1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} z' = 0 \\ y' = -x' \end{cases}$$

Questo vuol dire che $V_k = \{(x',y',z')_{\mathscr{A}} \mid z' = 0, y' = -x'\} = \{(x',-x',0)_{\mathscr{A}}\} = L(v_1 - v_2) = L((1,-1,1,-2))$.

Sia $T = 1$. L'autospazio V_1 è determinato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} -k & 1-2k & 1-3k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ci porta al sistema:

$$\begin{cases} -kx' + (1-2k)y' + (1-3k)z' = 0 \\ (k-1)y' + (k-1)z' = 0 \end{cases} \overset{k\neq 0,1}{\Longrightarrow} \begin{cases} z' = -y' \\ x' = y' \end{cases}$$

in modo che $V_1 = \{(x',y',z')_{\mathscr{A}} \mid z' = -y', x' = y'\} = \{(y',y',-y')_{\mathscr{A}}\} = L(v_1 + v_2 - v_3) = L((1,1,0,0))$.

Dunque, se $k \neq 0, \frac{1}{2}, 1$, una base di autovettori è formata da $(1,0,1,-1)$, $(1,-1,1,-2)$ e $(1,1,0,0)$ e, dal momento che il parametro k non compare in nessuno di questi vettori, questa è una base di autovettori per f anche nei casi $k = 0$, $k = \frac{1}{2}$ e $k = 1$. Perciò questa è la base di autovettori cercata.

4) Siano $w_1 = (1,0,1,-1)$, $w_2 = (1,-1,1,-2)$, $w_3 = (1,1,0,0)$ e sia $\mathscr{B} = [w_1, w_2, w_3]$ la base di autovettori di f indipendente dal parametro. Completiamo $\mathscr{B}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$. Si vede che $\mathscr{C} = [w_1, w_2, w_3, e_1]$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Infatti, abbiamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ridotta diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ha, quindi, chiaramente rango 4. Osserviamo, ora, che per la linearità di g e di f abbiamo:

$$g(w_1) = f(w_1) = (1-k) \cdot w_1 = (1-k, 0, 0, 0)_{\mathscr{C}},$$

$$g(w_2) = f(w_2) = k \cdot w_2 = (0, k, 0, 0)_{\mathscr{C}},$$

$$g(w_3) = f(w_3) = 1 \cdot w_3 = w_3 = (0, 0, 1, 0)_{\mathscr{C}}.$$

Quindi, la matrice di g rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ è:

$$M = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 0, 1$, $\rho(M) = \dim \operatorname{Im} g = 3$ e una base di $\operatorname{Im} g$ è formata dai vettori $(1-k, 0, 0, 0)_{\mathscr{C}} = (1-k)w_1$, $(0, k, 0, 0)_{\mathscr{C}} = kw_2$ e $(0, 0, 1, 0)_{\mathscr{C}} = w_3$, così che $\operatorname{Im} g = L((1-k)w_1, kw_2, w_3) = L(w_1, w_2, w_3) = W$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} g = \dim W - \dim \operatorname{Im} g = 0$, così che $\operatorname{Ker} g = \{\underline{0}\}$ e g è iniettiva.

Se $k = 0$, allora:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, dunque, $\rho(M) = \dim \operatorname{Im} g = 2$ e una base di $\operatorname{Im} g$ è formata dai vettori $(1,0,0,0)_{\mathscr{C}} = w_1$ e $(0,0,1,0)_{\mathscr{C}} = w_3$, cioè $\operatorname{Im} g = L(w_1, w_3)$. $\dim \operatorname{Ker} g = \dim W - \dim \operatorname{Im} g = 1$ e $\operatorname{Ker} g = L(w_2)$ (questo si vede subito dal fatto che la seconda colonna di M è nulla, che vuol dire che $g(w_2) = \underline{0}$).

Se $k = 1$, allora:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\rho(M) = \dim \operatorname{Im} g = 2$ e una base di $\operatorname{Im} g$ è formata dai vettori $(0,1,0,0)_{\mathscr{C}} = w_2$ e $(0,0,1,0)_{\mathscr{C}} = w_3$, così che $\operatorname{Im} g = L(w_2, w_3)$. $\dim \operatorname{Ker} g = \dim W - \dim \operatorname{Im} g = 1$ e $\operatorname{Ker} g = L(w_1)$ (anche questo si vede subito, perché adesso la prima colonna di M è nulla, che vuol dire che $g(w_1) = \underline{0}$).

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la distanza delle due rette:

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

2) Determinare e studiare il fascio ϕ di coniche del piano $z = 0$ tangenti in O alla retta $r : x + y = 0$ e passanti per i punti $A = (0,1)$ e $B = (1,1)$.

3) Detta Γ l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 - 2xy + x + y = z = 0$, determinare il cilindro C contenente Γ e avente vertice Z_∞, il punto improprio dell'asse $\vec{z}$. Detto π il piano di equazione $x - z = 0$, verificare che la conica sezione $C \cap \pi$ è un'iperbole.

4) Si classifichino le quadriche del fascio di equazione $(3\lambda - 1)x^2 + (1 - \lambda)y^2 + 2z - 4\lambda = 0$.

Risoluzione

1) Possiamo calcolare la distanza tra le due rette r e s in due modi.

   Cominciamo intanto con l'osservare che le due rette sono sghembe. Infatti, non hanno punti in comune e non sono parallele. Quindi, un primo metodo consiste nel trovare la retta t ortogonale e incidente entrambe le rette e nel trovare i punti $P_r = r \cap t$ e $P_s = s \cap t$ e, a questo punto la distanza $d(r,s) = d(P_r, P_s)$. Dunque, iniziamo col trovare la retta t.

   I parametri direttori di r sono $(1, -1, 0)$ e quelli di s sono $(0,0,1)$. Dovendo essere t ortogonale a entrambe le rette, i suoi parametri direttori (l, m, n) sono soluzione del sistema:

$$\begin{cases} l - m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

   e dunque sono $(1,1,0)$. Conosciamo, quindi, il punto improprio di t che è $P_\infty = (1,1,0,0)$. A questo punto la retta t è contenuta nel piano π_1 contenente r e P_∞:

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(z - 1) = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0,$$

   così che $\pi_1 : z - 1 = 0$. Analogamente t è contenuta nel piano contenente la retta s e il punto P_∞:

$$\lambda x + \mu y = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda,$$

così che $\pi_2 : x - y = 0$. Dunque adesso conosciamo le equazioni della retta t:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

A questo punto, $P_r = r \cap t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ e $P_s = s \cap t = (0, 0, 1)$ e:

$$d(r, s) = d(P_r, P_s) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Passiamo, adesso, al secondo metodo. La distanza tra le due rette può essere calcolata come la distanza della retta s dal piano π contenente r e parallelo alla retta s stessa (o, equivalentemente, come la distanza di r dal piano contenente s e parallelo a r stessa). Cerchiamo, il piano che contiene r ed è parallelo a s. Il generico piano contenente r ha equazione:

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(z - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + \lambda y + \mu z - \lambda - \mu = 0.$$

La condizione di parallelismo tra retta e piano si traduce in ortogonalità tra il vettore parallelo al piano e quello parallelo alla retta. Dato che i parametri direttori di s sono $(0, 0, 1)$ e quelli del piano sono (λ, λ, μ), deve essere $\mu = 0$ e, dunque:

$$\pi : x + y - 1 = 0.$$

Adesso, dato che s e π sono paralleli, la loro distanza è pari alla distanza di un punto qualsiasi di s dal piano π. Preso il punto $P = (0, 0, 1) \in s$, abbiamo:

$$d(r, s) = d(s, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Le coniche spezzate del fascio sono $AB \cup r$ e $OA \cup OB$. La retta AB ha equazione $y - 1 = 0$, OA ha equazione $x = 0$ e OB $x - y = 0$. Dunque, il fascio di coniche ha equazione:

$$\lambda(x + y)(y - 1) + \mu x(x - y) = 0.$$

Supponiamo $\lambda \neq 0$ e poniamo $\frac{\lambda}{\mu} = h$, ricordandoci che così facendo stiamo escludendo la conica spezzata $x(x - y) = 0$. In questo modo il fascio ϕ ha equazione:

$$hx^2 + y^2 + (1 - h)xy - x - y = 0.$$

La matrice associata a ϕ è:

$$B = \begin{pmatrix} h & \frac{1-h}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1-h}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e $\det B = -\frac{h}{2}$. Dunque, le coniche spezzate sono due, quella che si ottiene per $h = 0$, $(x + y)(y - 1) = 0$, e quella che avevamo inizialmente escluso, $x(x - y) = 0$. Cerchiamo adesso di capire come sono fatti i punti impropri di queste coniche:

$$\det A = \begin{vmatrix} h & \frac{1-h}{2} \\ \frac{1-h}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2 + 6h - 1}{4},$$

Dunque, se $3 - 2\sqrt{2} < h < 3 + 2\sqrt{2}$, allora $\det A > 0$ e abbiamo delle ellissi. Se $h = 3 + 2\sqrt{2}$ oppure se $h = 3 - 2\sqrt{2}$, allora $\det A = 0$ e abbiamo delle parabole. Se $h < 3 - 2\sqrt{2}$ e $\neq 0$ oppure se $h > 3 + 2\sqrt{2}$, allora $\det A > o$ e sono iperboli. Per $h = 1$ abbiamo una circonferenza, mentre per $h = -1$ abbiamo un'iperbole equilatera.

3) Sia $P = (\alpha, \beta, 0) \in \Gamma$, cioè:
$$\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta + x + y = 0. \tag{1}$$
Il punto $Z_\infty = (0,0,1,0)$ è il vertice del cilindro C e, dunque, la retta $PZ_\infty \subset C$. Tale retta ha equazioni:
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$$
e, quindi, utilizzando queste equazioni per ricavarci α e β, abbiamo $\alpha = x$ e $\beta = y$ e andando a sostituire in (1) troviamo l'equazione di C:
$$x^2 - y^2 - 2xy + x + y = 0.$$
Dal momento che per ipotesi C contiene l'iperbole Γ, C deve essere necessariamente un cilindro iperbolico e, perciò, le sezioni di C con piani che non passano per il suo vertice, che è Z_∞, sono sempre iperboli. Dato che $Z_\infty \notin \pi$, allora effettivamente $C \cap \pi$ è un'iperbole.

4) La matrice associata a al fascio di quadriche è:
$$B = \begin{pmatrix} 3\lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4\lambda \end{pmatrix}$$
così che $\det B = (3\lambda - 1)(\lambda - 1)$. Notiamo, poi, che $\det A = 0$ per ogni λ. Dunque, se $\lambda < \frac{1}{3}$ o $\lambda > 1$, allora $\det B > 0$ e, in tal caso, abbiamo un paraboloide iperbolico. Se $\frac{1}{3} < \lambda < 1$, allora $\det B < 0$ e abbiamo un paraboliode ellittico. Resta da vedere che succede nei casi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$.

Per $\lambda = \frac{1}{3}$ la matrice associata diventa:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$
che ha rango 2, come si vede subito dalla sua ridotta. In questo caso abbiamo un cilindro.

Per $\lambda = 1$ la matrice associata diventa:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
che ha rango 2, come si vede riducendola. Anche in questo caso abbiamo un cilindro.