CdL in Ingegneria Gestionale e CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Risoluzione della prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria- Compito A-** 18 Aprile 2008

Ia

E' assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla seguente matrice:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ h & -h & -2h \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.

1) Studiare l'endomorfismo f al variare di h determinando in ciascun caso una base di $Im\ f$, una base di $Ker\ f$ e le loro equazioni cartesiane.

2) Studiare la semplicitá di f al variare di h.

Risoluzione

1) Il determinante di $M(f)$ risulta:

$$det(M(f)) = h.$$

$\Rightarrow$ Se $h \neq 0$ si ha che il rango della matrice è 3, quindi $dimImf = 3, dimKerf = 0$ $\Rightarrow$ $Imf = \mathbb{R}^3$ e $Ker\ f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Se $h = 0$ si ha che il rango della matrice è 2, quindi $dimImf = 2$, $dimKerf = 1 \Rightarrow$ $Imf = \mathcal{L}((1,0,1),(0,0,-1))$ e $Ker\ f = \{(-2y, y, -y)\}$. Base del Ker f è $\mathcal{A} = \{(-2,1,-1)\}$. Le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$ nel caso $h \neq 0$ sono ovvie: $Imf = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ nessuna equazione cartesiana, e $Kerf$ è individuato da $x = y = z = 0$.
Le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$ nel caso $h = 0$ sono:

a) Imf (si ricordi che per trovare l'equazione cartesiana bisogna imporre che il rango della seguente matrice non deve essere massimo)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow det = 0 \to y = 0.$

b) $Kerf$, le equazioni cartesiane sono date da

$$Kerf : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

2) Lo studio della semplicita' consiste nel calcolare come prima cosa il polinomio caratteristico sottraendo T dalla diagonale principale della matrice dell'endomorfismo f,

$$\begin{pmatrix} 1-T & 2 & 0 \\ h & -h-T & -2h \\ 1 & 1 & -1-T \end{pmatrix}$$

$P.C.(T) = (1-T)(-h-T)(-1-T) - 4h + 2h(1-T) - 2h(-1-T) = (1-T)(-h-T)(-1-T) - 4h + 2h - 2hT + 2h + 2hT = (1-T)(-h-T)(-1-T)$.
Ne segue che gli autovalori sono $T_1 = 1$, $T_2 = -1$, $T_3 = -h$.
Se $h \neq \pm 1 \rightarrow T_1 \neq T_2 \neq T_3 \rightarrow$f è semplice.

Se $h = -1 \rightarrow T_1 = T_3 \neq T_2 \rightarrow T_1 = T_3 = 1$ con molteplicità algebrica 2 cioe $m_1 = 2$, $T_2 = -1$ con molteplicità algebrica $m_{-1} = 1$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore 1: $dimV_1 = 3 - \rho(M(f) - I) = 3 - 2 = 1 \neq m_1$ quindi l'endomorfismo non è semplice.

Se $h = 1 \rightarrow T_1 \neq T_2 == T_3 \rightarrow T_1 = 1$ con molteplicità algebrica 1 cioe $m_1 = 1$, $T_2 = T_3 = -1$ con molteplicità algebrica $m_{-1} = 2$. Calcoliamo la dimensione dell'autospazio associato all'autovalore -1: $dim\ V_{-1} = 3 - \rho(M(f) - I) = 3 - 2 = 1 \neq m_{-1}$ quindi l'endomorfismo non è semplice.

Ib

1) Determinare il valore del parametro reale k in modo che esista un'applicazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} &\varphi(1,2,1) = (2k, k + \frac{3}{2}, 1) \\ &\varphi(1,1,1) = (k, 1, -k) \\ &\varphi(1,0,1) = (0, k - \frac{1}{2}, -2) \\ &(-1,1,1) \in Ker\ \varphi \end{aligned}$$

2) Determinare una base $\mathscr{A}$ del dominio e una base $\mathscr{B}$ del codominio in modo che:

$$M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risoluzione

1) Il testo fornisce quattro vettori di R^3, che chiamiamo $v_1, v_2, v_3, v_4 \rightarrow$ uno di questi è necessariamente combinazione lineare degli altri $\rightarrow$ la nostra applicazione φ esiste se le immagini continuano ad avere la stessa combinazione lineare dei vettori del dominio.
Si nota che mettendo in riga in una matrice i nostri primi tre vettori v_1, v_2, v_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene una matrice avente determinante uguale a zero $\rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono l.d. e la loro combinazione lineare è $R_3 = 2R_2 - R_1 \rightarrow$ affinchè esista φ deve accadere che $\varphi(v_3) = 2\varphi(v_2) - \varphi(v_1) \rightarrow (0, k - \frac{1}{2}, -2) = 2(k, 1, -k) - (2k, k + \frac{3}{2}, 1) \rightarrow$ uguagliando ogni singola componente del primo membro con la corrispondente componente del secondo membro si ottiene $k = \frac{1}{2}$.

2) Sia $k=\frac{1}{2}$ per esistere la nostra applicazione lineare. Dette $\mathcal{A}=\{v_1,v_2,v_3\}$ e $\mathcal{B}=\{w_1,w_2,w_3\}$ le rispettive basi del dominio e codominio, per definizione di matrice associata a una applicazione lineare rispetto a due basi scelte rispettivamente nel dominio e codominio si hanno le segeunti relazioni

$$\varphi(v_1)=3w_1,\ \varphi(v_2)=\frac{1}{2}w_2,\ \varphi(v_3)=0$$

Da cui

$$w_1=\frac{1}{3}\varphi(v_1),\ w_2=2\varphi(v_2),\ w_3$$

Quindi scegliamo come base $\mathscr{A}=\{v_1,v_2,v_3\}$ la base formata da $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(1,1,1)$, $v_3=(-1,1,1)$ (i tre vettori l.i. del quesito precedente) e come base $\mathscr{B}=\{w_1,w_2,w_3\}$ formata da $w_1=\frac{1}{3}\varphi(v_1)=\frac{1}{3}(1,2,1)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $w_2=2\varphi(v_2)=2(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})=(1,2,-1)$, w_3 un qualunque vettore l.i. con w_1,w_2, (esempio $w_3=(0,0,1)$).

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Determinare la retta ortogonale e incidente le rette di equazioni $x-z-1=y-2z+1=0$ e $x-z-2=y-z+1=0$.

2) Sia π il piano passante per O e ortogonale alla retta r di equazioni $x-5y+14=4y+z-14=0$ e sia $N=\pi\cap r$. Determinare la retta t passante per N e parallela ai piani α e β di equazioni $2x-y+z-2=0$ e $x-3y+2z=0$ rispettivamente.

3) Determinare e studiare il fascio ϕ delle coniche del piano $z=0$ che passano per i punti $A=(1,0)$, $B=(1,2)$, O e sono tangenti in O all'asse $\vec{y}$.

4) Detta p la parabola del fascio ϕ si studi la generica quadrica che contiene p, contiene la retta $x-1=y-2=0$ ed tangente nell'origine al piano $x-z=0$.

Risoluzione

1) Cominciamo col determinare i punti impropri delle due rette:
i parametri direttori della retta $x-z-1=y-2z+1=0$ sono $(1,2,1)\rightarrow P^\infty=(1,2,1,0)$ e della retta $x-z-2=y-z+1=0$ sono $(1,1,1)\rightarrow P^\infty=(1,1,1,0)$.Dopodichè calcoliamo il punto impropio $P^\infty_\perp=(l,m,n,0)$ della retta ortogonale ad entrambe le rette imponendo la condizione di ortogonalità

$$\begin{cases} l\cdot 1+m\cdot 2+n\cdot 1=0 \\ l\cdot 1+m\cdot 1+n\cdot 1=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} m=0 \\ l=-n \end{cases}$$

$P^\infty_\perp=(-n,0,n,0)\rightarrow P^\infty_\perp=(-1,0,1,0)$. Consideriamo i fasci di piani aventi per assi le due rette:

$$\begin{cases} x-z-1+\lambda(y-2z+1)=0 \\ \mu(x-z-2)+(y-z+1)=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} \lambda=-3 \\ \mu=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-z-1-3(y-2z+1)=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

2) I parametri direttori della retta $x - 5y + 14 = 4y + z - 14 = 0$ sono $(5, 1, -4, 0) \to P^\infty = (5, 1, -4, 0) \to \pi : 5X + Y - 4Z = 0 \to$

$$N : \begin{cases} 5x + y - 4z = 0 \\ x - 5y + 14 = 0 \\ 4y + z - 14 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \to N = (1, 3, 2)$$

La retta t passante per N ha equazione:

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-2}{n}$$

avente parametri direttori (l,m,n) ortogonali ai parametri direttori dei due piani, quindi

$$\begin{cases} l \cdot 2 + m \cdot (-1) + n \cdot 1 = 0 \\ l \cdot 1 + m \cdot (-3) + n \cdot 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} m = -3l \\ n = -5l \end{cases} \to P^\infty = (1, -3, -5, 0) \to$$

$$t : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{-5} \to t : \begin{cases} 3x + y - 6 = 0 - 3 \\ 5x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

3) ϕ è un fascio di coniche tangenti; una conica spezzata è data dalla retta tangente (x=0) e dalla retta passante per i due punti A e B (x-1=0), l'altra è la congiungente il punto di tangenza con A e con B (y(2x-y)=0) quindi

$$\phi : x(x-1) + \lambda y(2x - y) = z = 0$$

Il determinante della matrice associata 3x3 $DetB = -\frac{\lambda}{4}$ e della sottomatrice 2x2 $DetA = -\lambda - \lambda^2$.
Se $DetB = -\frac{\lambda}{4} \neq 0 \to \lambda \neq 0 \to$ coniche irriducibili. Se $detA = -\lambda - \lambda^2 > 0 \to -1 < \lambda < 0 \to$ellissi.
Se $detA = -\lambda - \lambda^2 = 0 \to \lambda = -1 \to$parabola.
Se $detA = -\lambda - \lambda^2 < 0 \to \lambda < -1, \lambda > 0 \to$iperboli. L'iperbole equilatera si ottiene per $\lambda = 1$.
Abbiamo caratterizzato solo le coniche irriducibili poiche' conosciamo i punti base del fascio e le sue coniche spezzate.

4) La parabola del fascio si ottiene per $\lambda = -1 \to$

$$p : x^2 + y^2 - 2xy - x = 0$$

la quadrica contenente la parabola è

$$z(ax + by + cz + d) + x^2 + y^2 - 2xy - x = 0$$

affinchè essa contenga la retta dobbiamo sostituire le coordinate del punto generico della retta nell'equazione della quadrica cioè

$$z(a \cdot 1 + b \cdot 2 + cz + d) + 1 + 4 - 4 - 1 = 0 \to c = 0, a + 2b + d = 0$$

Inoltre è noto che il piano tangente ad una quadrica nell'origine è il complesso dei termini di I grado, cioè

$$dz - x = 0 \to x - dz = 0 \to d = 1 \to a + 2b + 1 = 0 \to$$

la quadrica generica cercata è

$$z((-1 - 2b)x + by + 1) + x^2 + y^2 - 2xy - x = 0$$

La matrice associata al fascio di quadriche

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{-1-2b}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{b}{2} & 0 \\ \frac{-1-2b}{2} & \frac{b}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Scegliamo l'ultima riga per applicare il primo teorema di Laplace

$$detB = \frac{(b+2)^2}{16} \to detB > 0 \ \forall b \neq -2$$

In modo analogo calcoliamo il $detA$

$$detA = -\frac{(b+1)^2}{4} \to detA < 0 \ \forall b \neq -1$$

Se $detB = 0 \to b = -2 \to$ Quadrica degenere con $detA = -\frac{1}{4} \neq 0 \to$ Cono.
Se $detB \neq 0 \to b \neq -2 \to$ Quadriche non degeneri.
In particolare
a)se $detA = 0 \to b = -1 \to$ Paraboloide ed è iperbolico poichè il $detB > 0$.
b)se $detA \neq 0 \to b \neq -1 \to$ Iperboloidi o Ellissoidi . Esse sono iperboloidi poichè dal polinomio caratteristico di A si vede che

$$P_A(T) = -T^3 + 2T^2 + \frac{(5b^2 + 4b + 1)}{4} + etc..$$

dove il trinomio $5b^2 + 4b + 1 > 0 \ \forall b$ quindi i coefficienti del polinomio caratteristico non sono a segni alternati e non sono dello stesso segno. Inoltre si tratta si iperboloidi iperbolici poichè il $detB > 0$.