CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Algebra Lineare**- 3 Maggio 2017

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Sono dati i vettori $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ ed è dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 \\ f(v_2) &= -hv_1 + (h+1)v_2 \\ f(v_3) &= -2v_1 + 2v_2 - v_3, \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$, determinando le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare, se possibile, una base di autovettori nel caso $h = 0$.
3. Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\begin{aligned} g(v_1) &= v_1 - v_3 \\ g(v_2) &= v_2 \\ g(v_3) &= 2v_1 - v_3. \end{aligned}$$

   Mostrare che per $h = 0$ l'applicazione $f \circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è invertibile e calcolare una matrice associata all'applicazione inversa $(f \circ g)^{-1}$.
4. Calcolare $f^{-1}(hv_2 - v_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = hv_2 - v_3\}$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

1. Si verifica facilmente che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Per definizione di componenti di un vettore rispetto a una base si ha:

$$\begin{aligned} [f(v_1)]_{\mathscr{A}} &= (1,0,0) \\ [f(v_2)]_{\mathscr{A}} &= (-h, h+1, 0) \\ [f(v_3)]_{\mathscr{A}} &= (-2, 2, -1), \end{aligned}$$

   per cui:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -h & -2 \\ 0 & h+1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Dunque, per $h \neq -1$ f è un isomorfismo, per cui f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.
   Sia $h = -1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data da:

$$[f(v_1), f(v_3)] = [v_1, -2v_1 + 2v_2 - v_3] = [(1,0,-1), (1,2,1)].$$

Una sua equazione cartesiana è data da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + 2z = 0,$$

cioè $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ a + b - 2c = 0,\ 2c = 0\} = \\ = \mathscr{L}((1,-1,0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1 - v_2) = \mathscr{L}((-1,-1,-1))$$

e si vede che $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

2. Si ha:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & -h & -2 \\ 0 & h+1-T & 2 \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} = (1-T)(h+1-T)(-1-T).$$

Dunque, gli autovalori sono $1, h+1, -1$ ed essi sono a due a due distinti per $h \neq 0, -2$. In tal caso, dunque, f è semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$ e che $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$, da cui segue che f è semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Inoltre, $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 1$ e $\dim V_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 2 = m_1$, per cui per $h = 0$ f è semplice ed esiste una base di autovettori. Dalla matrice precedente abbiamo:

$$V_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -2c = 0\} = \mathscr{L}((1,0,0)_{\mathscr{A}}, (0,1,0)_{\mathscr{A}}) = \\ = \mathscr{L}(v_1, v_2) = \mathscr{L}((1,0,-1),(2,1,0)).$$

Calcoliamo, ora, V_{-1}. Sappiamo che $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a - 2c = 0,\ 2b + 2c = 0\} = \mathscr{L}((1,-1,1)_{\mathscr{A}}) = \\ = \mathscr{L}(v_1 - v_2 + v_3) = \mathscr{L}((0,-1,0)).$$

Quindi, una base di autovettori per f nel caso $h = 0$ è $[(1,0,-1),(2,1,0),(0,-1,0)]$.

Sia $h = -2$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_{-1} = 2$ e $m_1 = 1$. Sappiamo che $\dim V_1 = m_1 = 1$ e che $1 \leq \dim V_{-1} \leq 2 = m_{-1}$, da cui segue che f è semplice se $\dim V_{-1} = m_{-1} = 2$. Inoltre, $f_{-1} = f + i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_{-1}) = M^{\mathscr{A}}(f) + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1})) = 2$ e $\dim V_{-1} = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(f_{-1})) = 1 < 2 = m_{-1}$, per cui per $h = -2$ f non è semplice.

3. Si vede che:

$$M^{\mathscr{A}}(f \circ g) = M^{\mathscr{A}}(f) \cdot M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Dato che $|M(f \circ g)| = -1 \neq 0$, concludiamo che $f \circ g$ è invertibile e abbiamo che:

$$M^{\mathscr{A}}((f \circ g)^{-1}) = (M^{\mathscr{A}}(f \circ g))^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -h & -2 & 0 \\ 0 & h+1 & 2 & h \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

   Tale sistema ha una sola soluzione per $h \neq -1$:

$$\begin{cases} a - hb - 2c = 0 \\ (h+1)b + 2c = h \\ -c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{h^2+2}{h+1} \\ b = \dfrac{h-2}{h+1} \\ c = 1. \end{cases}$$

   Dunque:

$$f^{-1}(hv_2 - v_3) = \left\{ \frac{h^2+2}{h+1} v_1 + \frac{h-2}{h+1} v_2 + v_3 \right\} = \left\{ \left(\frac{h^2+3h-1}{h+1}, \frac{h-2}{h+1}, \frac{-h^2+h-1}{h+1} \right) \right\}.$$

   Sia, ora, $h = -1$. In tal caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right),$$

   per cui il sistema è impossibile e per $h = -1$ $f^{-1}(hv_2 - v_3) = \emptyset$.