CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr)

Algebra Lineare e Geometria: Prova in itinere di **Geometria**- 16 Giugno 2017

Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti. Compito A

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati i punti, $A = (1,1,0)$, $B = (1,0,-1)$ e $P_\infty = (1,-1,2,0)$ e i piani $\pi_1\colon x - y - z = 0$ e $\pi_2\colon 2x + y + z + 3 = 0$.
   (a) Determinare le equazioni delle rette AB e AP_∞.
   (b) Determinare il piano π passante per A e perpendicolare a π_1 e π_2.
   (c) Determinare la distanza $d(A, r)$ di A dalla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
2. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:
$$2hx^2 - 2hxy + y^2 - 2hx + 2hy - 1 = 0,$$
   determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate.
3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + y^2 + 2yz + kz^2 - 2y = 0.$$

Soluzione

1. (a) La retta AB ha parametri direttori $(0,1,1)$, per cui essa ha equazioni:
$$AB\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - z - 1 = 0. \end{cases}$$
   La retta AP_∞ ha parametri direttori $(1,-1,2)$ ed essa ha equazioni:
$$AP_\infty\colon x - 1 = -(y-1) = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$$
   (b) Il piano π ha un vettore ortogonale di componenti (a, b, c) ed esso deve essere ortogonale ai vettori di componenti $(1,-1,-1)$ e $(2,1,1)$. Dunque, deve essere:
$$\begin{cases} a - b - c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b. \end{cases}$$
   Dunque, il piano π ha equazione $y - z - 1 = 0$.
   (c) La retta r è:
$$r\colon \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + z + 3 = 0. \end{cases}$$
   Il piano π trovato in precedenza è ortogonale, per costruzione, alla retta r e passa per A. Dunque, se $H = \pi \cap r$, si ha $d(A, r) = \overline{AH}$. Quindi:
$$H = \pi \cap r \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + z + 3 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1. \end{cases}$$
   Quindi, $H = (-1, 0, -1)$ e si ha:
$$d(A, r) = \overline{AH} = \sqrt{6}.$$

2. Il fascio di coniche ha equazione:

$$2h(x^2 - xy - x + y) + y^2 - 1 = 0,$$

per cui la conica nascosta del fascio ha equazione $(x-1)(x-y) = 0$. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 2h & -h & -h \\ -h & 1 & h \\ -h & h & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 2h & -h \\ -h & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B| = -2h$, l'altra conica spezzata del fascio si ottiene per $h = 0$ ed essa ha equazione $(y+1)(y-1) = 0$. I punti base del fascio sono dati da:

$$\begin{cases} (x-1)(x-y) = 0 \\ (y+1)(y-1) = 0, \end{cases}$$

da cui otteniamo i punti $(1,1)$, contato due volte, $(1,-1)$ e $(-1,-1)$. Inoltre, $|A| = 2h - h^2$, per cui per $h < 0$ e $h > 2$ abbiamo delle iperboli, tra le quali abbiamo quella equilatera per $h = -\frac{1}{2}$, per $h = 2$ abbiamo una parabola e per $0 < h < 2$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, nessuna delle quali è una circonferenza.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha che $|B| = -k$ e $|A| = k - 1$. Quindi, per $k = 0$ abbiamo un cono e per $k = 1$ abbiamo un paraboloide ellittico.

Sia $k \neq 0, 1$. Si ha che:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 1 \\ 0 & 1 & k-T \end{vmatrix} = (1-T)[T^2 - (k+1)T + k - 1].$$

Gli autovalori sono tutti concordi se $k > 1$, per cui per $k > 1$ abbiamo degli ellissoidi, tutti reali perché $|B| < 0$. Per $k < 1$, $k \neq 0$, abbiamo degli iperboloidi. In particolare, per $0 < k < 1$ abbiamo degli iperboloidi ellittici, in quanto $|B| < 0$; per $k < 0$ abbiamo degli iperboloidi iperbolici, in quanto $|B| > 0$.