CdL in Ingegneria Informatica (A-Co e J-Pr) - Ingegneria Elettronica (A-Co e J-Pr), Ingegneria REA, Ingegneria Industriale (F-O), Ingegneria Gestionale,Ingegneria Meccanica, Ingegneria Elettrica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 27 Settembre 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

È assegnata l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le assegnazioni:

$$\begin{cases} f(1,1,1) &= (2h+1, h, -1) \\ f(2,1,0) &= (2,h,0) \\ f(0,0,1) &= (2h, h, -1) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale.}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Calcolare, al variare di h, la controimmagine $f^{-1}(0,2,3)$.
3. Studiare le semplicità di f al variare di h determinando, quando possibile, una base di autovettori.
4. Dato il sottospazio $V = \{(x,y,z) \mid z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ verificare che f induce un endomorfismo $f' : V \to V$. Determinare il valore di h per cui f' è isomorfismo.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnate le rette r e s, il punto P e il piano π

   $$r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad P \equiv r \cap s \qquad \pi : x + 2y = 0$$

   Determinare la retta t passante per P e ortogonale a π. Mostrare che r e t sono complanari e determinare il piano che le contiene.
2. Determinare la conica Θ tangente alla retta $y - 2x = 0$ nell'origine e alla retta $2x + y + 8 = 0$ nel punto $(-4, 0)$ e passante per il punto $(0, -1)$. Mostrare che Θ è un'iperbole e determinare i suoi asintoti.
3. Studiare, al variare del parametro reale k, il fascio di quadriche di equazione:

   $$kx^2 - y^2 - 2kyz + 2y - 2z = 0.$$

SOLUZIONE, I

1) Con tecniche standard si trova la matrice associata ad f rispetto alla base canonica:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2h \\ h & -h & h \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad |M(f)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2h \\ h & -h & h \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = h.$$

Quindi se $h \neq 0$ f è un isomorfismo; per $h = 0$ troviamo facilmente $\Im f = Ł((1,0,0), (0,0,-1))$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,y,0)\}$.

2) Se $h \neq 0$ la richiesta controimmagine contiene un solo vettore; vediamo che risolvendo il sistema lineare della controimmagine si otiiene
$f^{-1}(0,2,3) = \{(6h, \frac{6h^2-3h-2}{h}, -3)\}$. Per $h = 0$ dobbiamo risolvere il sistema lineare associato alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

ed avremo il sistema impossibile

3) Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$P(T) = (1-T)(h-T)(-1-T); \quad T = \pm 1, T = -h$$

e troviamo facilmente che gli autovalori sono distinti per $h \neq \pm 1$. In questo caso, $h \neq \pm 1$, gli autospazi sono dati da:
$V_1 = \{((h+1)y, y, 0)\}$
$V_{-1} = \{((hz, -2hz, z)\}$
e il terzo autospazio è $V_{-h} = \{(0,y,0)\}$.
La base di autovettori è $u_1 = (h+1, 1, 0)$, $u_2 = (h, -2h, 1)$, $u_3 = (0,1,0)$. Casi particolari:
Se $h = 1$ l'autovalore (-1) diventa doppio e si vede che $V_{-1} = \{(x,y,-x)\}$ quindi la $\dim V_{-1} = 2$ quindi f è semplice.
Calcoliamo la base di autovettori se $h = 1$: Abbiamo calcolato V_{-1} e rimane da calcolare V_1 e si vede che $V_1 = \{(2y, y, 0)\}$ quindi se $h = 1$ una base di autovettori è
$w_1 = (2,1,0)$, $w_2 = (1,0,-1)$, $w_3 = (0,1,0)$.
Inoltre se invece $h = -1$ l'autovalore 1 diventa doppio e si vede che $V_1 = \{(0,y,0)\}$la $\dim V_1 = 1$ quindi f non è semplice.
4) Da $V = \{(x,y,0)\}$ otteniamo una base di V: $\mathcal{A} = [e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)]$. Usando questa base avremo: $f(e_1) = (1,h,0) = (1,h)_{\mathcal{A}}$, $f(e_2) = (0,-h,0) = (0,-h)_{\mathcal{A}}$. Quindi

$$M^{\mathcal{A}}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & -h \end{pmatrix}.$$

Quindi se $h \neq 0$ la matrice ha rango 2 e si tratta di un isomorfismo.

Soluzione

- Le coordinate del punto P si calcolano facilmente ed in particolare $P = (1,0,1)$. Un vettore ortogonale al piano π è quello di componenti $(1,2,0)$. Quindi, $(1,2,0)$ sono i parametri direttori della retta t che ha equazioni:

$$t : \begin{cases} 2x - 2 = y \\ z = 1 \end{cases}$$

  Osservando le equazioni di r e t scopriamo che hanno un piano in comune (z=1) quindi le due rette sono complanari ed il piano che le contiene ha equazione $z - 1 = 0$.

- Costruiamo il fascio di coniche individuato dalle due tangenti nell'origine e nel punto $(-4,0)$. La prima conica spezzata è $(y-2x)(2x+y+8)=0$ e la seconda è $y^2=0$. Il fascio ha equazione:

$$(y-2x)(2x+y+8)+\lambda y^2=0.$$

Da cui Troviamo Θ imponendo il passaggio per $(0,-1)$:

$$\lambda=7$$

Quindi, Θ ha equazione:

$$x^2-2y^2+4x-2y=0,$$

La matrice associata alla conica è:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e si vede che $|B|=7\neq 0$. Quindi, Θ è una conica irriducibile. Inoltre:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2<0.$$

Quindi, Θ è un'iperbole e, essendo $\mathrm{Tr}(A)=-1\neq 0$, non è equilatera. Per determinare gli asintoti di Θ ci serve il suo centro di simmetria, che è individuato dalle prime due righe di B:

$$\begin{cases} x+2=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il centro è il punto $C=(-2,-\frac{1}{2})$. Gli asintoti sono le rette che congiungono C con i punti impropri di Θ. Troviamo questi punti:

$$\begin{cases} x^2-2y^2+4xt-2yt=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2}y \\ t=0. \end{cases}$$

Quindi, i punti impropri di Γ sono $(\sqrt{2},1,0)$ e $(-\sqrt{2},1,0)$. Le rette che congiungono $C=(-2,\frac{1}{2})$ con questi due punti sono:

$$\frac{x+2}{\sqrt{2}}=y-\frac{1}{2} \text{ e } \frac{x+2}{-\sqrt{2}}=y-\frac{1}{2}$$

- La matrice associata al fascio di quadriche è:

$$B=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -k & 1 \\ 0 & -k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B|=k(2k+1)=0 \quad \text{per } k=-\frac{1}{2},0 \\ |A|=-k^3=0 \quad \text{per } k=0. \end{array}$$

Quindi, le quadriche degeneri si hanno per $k=-\frac{1}{2},0$. Consideriamo i casi particolari

  - $k=0 \quad y^2-2y+2z=0$: si tratta di un cilindro, perché la matrice associata

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    ha rango 3;
  - $k=-\frac{1}{2} \quad x^2+2y^2-2yz-4y+4z=0$: si tratta di un cono, perché $|A|\neq 0$.

Sia $h \neq 0, -\frac{1}{2}$. Dal polinomio caratteristico di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} k-T & 0 & 0 \\ 0 & -1-T & -k \\ 0 & -k & -T \end{vmatrix} = -T^3 + (k-1)T^2 + (k+k^2)T - k^3,$$

vediamo che gli autovalori non sono mai concordi, perché si ha $k < 1$ e $1 < k < 0$ con $k > 0$ non potranno sussistere contemporaneamente oppure se fossero tutte variazioni non sarà mai contemporaneamente $k > 1$ e $k + k^2 < 0$ e $k^3 < 0$. Quindi non abbiamo mai un ellissoide. Avremo:

1. $k < -\frac{1}{2}$, $k > 0$ iperboloidi iperbolici;
2. $-\frac{1}{2} < k < 0$ iperboloidi ellittici.