CdL in Ingegneria Informatica (A-Co, Cp-I e J-Pr) - Ingegneria REA
Ingegneria Elettronica (A-Co, Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Industriale (A-E e F-O)
Ingegneria Gestionale - Ingegneria Meccanica - Ingegneria Elettrica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 27 Gennaio 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,-1,0)$, la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di $\mathbb{R}^3$ ed è assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned}[f(v_1)]_{\mathscr{A}} &= (2,1,0)\\ [f(v_2)]_{\mathscr{A}} &= (-1,0,-h)\\ [f(v_3)]_{\mathscr{A}} &= (0,-h,2),\end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Dato $V = \mathscr{L}(v_1, v_2)$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $f|_V$ induce un endomorfismo g di V.
4. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale il vettore $w = v_1 + 2v_2 + v_3$ è autovettore per f, specificandone l'autovalore associato.

Soluzione

1. Dall'assegnazione di f e dalla definizione di matrice associata otteniamo immediatamente che:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -h \\ 0 & -h & 2 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che $|M^{\mathscr{A}}| = 2(1-h^2)$, vediamo che per $h \neq \pm 1$ f è un isomorfismo, cioè è iniettiva e suriettiva. In particolare, per tali valori si ha $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.
Sia $h = 1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 2$ e:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((2,1,0)_{\mathscr{A}}, (-1,0,-1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(2v_1 + v_2, -v_1 - v_3) = \mathscr{L}((2,1,1), (-2,1,0)).$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ 2a - b = 0,\ a - c = 0\} &= \\ = \mathscr{L}((1,2,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1 + 2v_2 + v_3) &= \mathscr{L}((2,1,2)).\end{aligned}$$

Sia $h=-1$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xmapsto{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f=\rho(M^{\mathscr{A}}(f))=2$ e:

$$\operatorname{Im} f=\mathscr{L}((2,1,0)_{\mathscr{A}},(-1,0,1)_{\mathscr{A}})=\mathscr{L}(2v_1+v_2,-v_1+v_3)=\mathscr{L}((2,1,1),(0,-1,0)).$$

Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f=3-\dim \operatorname{Im} f=1$ e:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f=\{v\in\mathbb{R}^3\mid [v]_{\mathscr{A}}=(a,b,c),\ 2a-b=0,\ a+c=0\}=\\=\mathscr{L}((1,2,-1)_{\mathscr{A}})=\mathscr{L}(v_1+2v_2-v_3)=\mathscr{L}((0,3,2)).\end{aligned}$$

2. Si vede che:

$$P(T)=\begin{vmatrix}2-T&-1&0\\1&-T&-h\\0&-h&2-T\end{vmatrix}=(2-T)[T^2-2T+1-h^2],$$

per cui gli autovalori sono 2, $1+h$ e $1-h$. Essi sono a due a due distinti per $h\neq 0,1,-1$. Quindi, per $h\neq 0,1,-1$ gli autovalori sono tutti di molteplicità algebrica 1. Ciò implica che per $h\neq 0,1,-1$ f è semplice.

Sia $h=0$. In tal caso, gli autovalori sono 2 e 1, con $m_2=1$ e $m_1=2$. Dunque, $1\le \dim V_2\le m_2=1$, per cui $\dim V_2=m_2=1$, mentre $1\le\dim V_1\le 2=m_1$. Questo vuol dire che f è certamente semplice se $\dim V_1=2=m_1$. Sappiamo che $V_1=\operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1=f-i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1)=M^{\mathscr{A}}(f)-I=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xmapsto{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_1=\dim\operatorname{Ker} f_1=3-\rho(M^{\mathscr{A}}(f_1))=3-2=1<2=m_1$. Questo vuol dire che per $h=0$ f non è semplice.

Sia $h=1$. In tal caso, gli autovalori sono 2 e 1, con $m_2=2$ e $m_0=1$. Dunque, $1\le\dim V_0\le m_0=1$, per cui $\dim V_0=m_0=1$, mentre $1\le\dim V_2\le 2=m_2$. Questo vuol dire che f è certamente semplice se $\dim V_2=2=m_2$. Sappiamo che $V_2=\operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2=f-2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2)=M^{\mathscr{A}}(f)-2I=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-2&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xmapsto{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_2=\dim\operatorname{Ker} f_2=3-\rho(M^{\mathscr{A}}(f_2))=3-2=1<2=m_2$. Questo vuol dire che per $h=1$ f non è semplice.

Sia $h=-1$. In tal caso, gli autovalori sono 2 e 1, con $m_2=2$ e $m_0=1$. Dunque, $1\le\dim V_0\le m_0=1$, per cui $\dim V_0=m_0=1$, mentre $1\le\dim V_2\le 2=m_2$. Questo vuol dire che f è certamente semplice se $\dim V_2=2=m_2$. Sappiamo che $V_2=\operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2=f-2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_2)=M^{\mathscr{A}}(f)-2I=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\xmapsto{\text{riducendo}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim V_2=\dim\operatorname{Ker} f_2=3-\rho(M^{\mathscr{A}}(f_2))=3-2=1<2=m_2$. Questo vuol dire che per $h=-1$ f non è semplice.

3. Sappiamo che $f(V) = \mathscr{L}(f(v_1), f(v_2))$. Per assegnazione sappiamo che $f(v_1) = 2v_1 + v_2$ e che $f(v_2) = -v_1 - hv_3$, per cui $f(V) = \mathscr{L}(2v_1 + v_2, -v_1 - hv_3)$.

   La restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo g di V se $f(V) \subseteq V$. Dato che $f(V) = \mathscr{L}(2v_1 + v_2, -v_1 - hv_3)$, $f(V) \subseteq V$ se e solo se $2v_1 + v_2, -v_1 - hv_3 \in V$. Essendo $V = \mathscr{L}(v_1, v_2)$, è chiaro che $2v_1 + v_2 \in V$. Tuttavia, $-v_1 - hv_3 \in V$ se e solo se $-hv_3 \in \mathscr{L}(v_1, v_2)$, ma v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, in quanto individuano una base di $\mathbb{R}^3$. L'unica possibilità è che sia $h = 0$. Questo vuol dire che per $h = 0$ la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo g di V.

   Alternativamente, si vede facilmente che $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$. Inoltre:

$$f(V) = \mathscr{L}(2v_1 + v_2, -v_1 - hv_3) = \mathscr{L}((2, 1, 1), (-1 - h, h, 0))$$

   e $f(V) \subseteq V$ se e solo se $(2, 1, 1), (-1 - h, h, 0) \in V$, cioè se e solo se verificano l'equazione cartesiana di V. Quindi, chiaramente $(2, 1, 1) \in V$ e $(-1 - h, h, 0) \in V$ solo per $h = 0$. Questo vuol dire che per $h = 0$ la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo g di V.

4. Si ha che $[w]_{\mathscr{A}} = (1, 2, 1)$. Dunque, da:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -h \\ 0 & -h & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - h \\ 2 - 2h \end{pmatrix}.$$

   Dunque, $[f(w)]_{\mathscr{A}} = (0, 1 - h, 2 - 2h)$, cioè $f(w) = (1 - h)v_2 + (2 - 2h)v_3 = (2 - 2h, h - 1, 1 - h)$. Essendo $w = (2, 1, 2)$, esso è autovettore se la matrice seguente ha rango 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 - 2h & h - 1 & 1 - h \end{pmatrix} \xmapsto{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2h - 2 & h - 1 \end{pmatrix}.$$

   Quindi, per $h = 1$ w è autovettore e, essendo in tal caso $f(w) = (0, 0, 0)$, si ha che 0 è l'autovalore associato.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

   e $P = (1, 0, 0)$, determinare il luogo di rette passanti per P che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $O = (0, 0)$, $A = (0, 1)$ e $P_\infty = (1, 2, 0)$ e tangenti in P_∞ alla retta $s\colon 2x - y - 1 = 0$.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + 2hxy + z^2 - 2y + h = 0.$$

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(1, 1, -1)$ e le rette passanti per P hanno equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = mt \\ z = nt. \end{cases}$$

   Queste rette formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con r se:

$$\frac{l + m - n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{3}} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow 2(l + m - n) = \pm\sqrt{3(l^2 + m^2 + n^2)}.$$

Elevando al quadrato, troviamo:

$$l^2 + m^2 + n^2 + 8lm - 8ln - 8mn = 0.$$

Ricaviamo l, m, n dalle equazioni delle rette per P:

$$\begin{cases} l = \dfrac{x-1}{t} \\ m = \dfrac{y}{t} \\ n = \dfrac{z}{t} \end{cases}$$

e andiamo a sostituirle:

$$\frac{(x-1)^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} + \frac{z^2}{t^2} + \frac{8(x-1)y}{t^2} - \frac{8(x-1)z}{t^2} - 8\frac{yz}{t^2} = 0.$$

Quindi, l'equazione del luogo cercato è:

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 + 8(x-1)y - 8(x-1)z - 8yz = 0.$$

2. Le rette da considerare sono $OA\colon x = 0$, $OP_\infty\colon 2x - y = 0$ e $AP_\infty\colon 2x - y + 1 = 0$. Quindi, le coniche spezzate del fascio sono $x(2x - y - 1) = 0$ e $(2x - y)(2x - y + 1) = 0$. Dunque, il fascio di coniche cercato ha equazione:

$$hx(2x - y - 1) + (2x - y)(2x - y + 1) = 0 \Rightarrow (2h + 4)x^2 + (-h - 4)xy + y^2 + (2 - h)x - y = 0.$$

Dal momento che le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione, è chiaro che $|B| = 0$ solo per $h = 0$. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2h+4 & \dfrac{-h-4}{2} \\ \dfrac{-h-4}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{h^2}{4},$$

vediamo che le coniche irriducibili del fascio sono tutte iperboli.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & h \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che $|B| = -h^3 - 1 = (-h - 1)(h^2 + h + 1)$ e $|A| = -h^2$. Quindi, per $h = -1$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui abbiamo un cono. Per $h = 0$ abbiamo $|B| = -1$ e $|A| = 0$, per cui abbiamo un paraboloide ellittico.

Sia $h \neq 0, -1$. In tal caso:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & h & 0 \\ h & -T & 0 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)[T^2 - T - h^2] = -T^3 + 2T^2 + (h^2 - 1)T - h^2.$$

È evidente che, per la regola dei segno di Cartesio, gli autovalori di A non hanno tutti lo stesso segno e abbiamo degli iperboloidi. Ciò vuol dire che per $h < -1$ abbiamo $|B| > 0$ e $|A| \neq 0$, per cui la quadrica è un iperboloide iperbolico, mentre per $h > -1$ abbiamo $|B| < 0$ e $|A| \neq 0$, per cui la quadrica è un iperboloide ellittico.