CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr) e Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 24 Novembre 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ individuata da:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & -1 \\ 0 & h+1 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2. Dato $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + t = 0\}$, calcolare $f^{-1}(U)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Mostrare che $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.
4. Data al variare di $h \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & h \\ 0 & h+1 & 1 \\ 0 & 1 & h+1 \end{pmatrix},$$

determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale A è diagonalizzabile e determinare una matrice diagonale simile ad A.

Soluzione

1. Si vede che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & -1 \\ 0 & h+1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, } h\neq 0,-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ h+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, per $h \neq 0, -1$ la matrice ottenuta è ridotta di rango 3, cioè $\dim \operatorname{Im} f = 3$ e una sua base è $[(1,h,1,0), (-1,1,h,h+1), (-2,1,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e f è iniettiva.

Sia $h = 0$. In tal caso, si ha:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, } h\neq 0,-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,0,1,0), (-1,1,0,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0,\ y + z = 0\} = \mathscr{L}((-1,1,-1)).$$

Sia $h = -1$. In tal caso, si ha:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo, } h \neq 0,-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è $[(1,-1,1,0), (-2,1,-1,1)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0,\ -z = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0)).$$

2. Calcoliamo $f(x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ h & 1 & 1 \\ 1 & h & -1 \\ 0 & h+1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - 2z \\ hx + y + z \\ x + hy - z \\ (h+1)y + z \end{pmatrix},$$

per cui:

$$f(x,y,z) = (x - y - 2z, hx + y + z, x + hy - z, (h+1)y + z).$$

Dunque:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y - 2z, hx + y + z, x + hy - z, (h+1)y + z) \in U\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z - (x + hy - z) + (h+1)y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Questo vuol dire che $\operatorname{Im} f \subseteq U$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3. È semplice vedere che $(1,0,0,0) \notin U$, per cui, dato che $\operatorname{Im} f \subseteq U$ per ogni $h \in \mathbb{R}$, $(1,0,0,0) \notin \operatorname{Im} f$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Ciò implica che $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Alternativamente, occorre risolvere il sistema la cui matrice associata completa è:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ h & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & -1 & 0 \\ 0 & h+1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Dato che $\det(A|B) = -2(h^2 + h)$, vediamo che per $h \neq 0, -1$ $\rho(A|B) = 4$ mentre $\rho(M(f)) = 3$, per cui il sistema è impossibile e $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$ per $h \neq 0, -1$.

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è impossibile e $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$ per $h = 0$.

Sia $h = -1$. In tal caso:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

per cui il sistema è impossibile e $f^{-1}(1,0,0,0) = \emptyset$ per $h = -1$.

4. Il polinomio caratteristico di A è:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} h-T & 1 & h \\ 0 & h+1-T & 1 \\ 0 & 1 & h+1-T \end{vmatrix} = (h-T)^2(h+2-T),$$

per cui gli autovalori sono h e $h+2$, con $m_h = 2$ e $m_{h+2} = 1$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Essendo necessariamente $\dim V_{h+2} = m_{h+2} = 1$ per ogni h, A è diagonalizzabile se $\dim V_h = m_h = 2$. Sappiamo che V_h è il nucleo dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata è $A - 2I$. Essendo:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si vede facilmente che per $h \neq 1$ $\dim V_1 = 3 - \rho(A-2I) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_h$, per cui per $h \neq 1$ A non è diagonalizzabile. Invece, per $h = 1$ si ha $\dim V_1 = 3 - \rho(A-2I) = 3 - 1 = 2 = m_h$, per cui per $h = 1$ A è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati i piani $\pi\colon x - y - z + 1 = 0$ e $\pi_2\colon 2x - y + z - 1 = 0$ e il punto $P = (1, 1, -1)$, determinare la retta r parallela ai piani π_1 e π_2 e passante per P e il piano π perpendicolare a π_1 e π_2 e passante per P.

2. Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio di coniche di equazione:

$$2x^2 - 2hxy + y^2 - 2x = 0,$$

determinando, in particolare, punti base e coniche spezzate del fascio.

3. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + hy^2 + (h+1)z^2 + 2x + 2z + 1 = 0,$$

determinandone, ove possibile, il vertice.

Soluzione

1. La retta r è del tipo:

$$r\colon \begin{cases} x - y - z + h = 0 \\ 2x - y + z + k = 0. \end{cases}$$

Imponendo il passaggio per P troviamo $h = -1$ e $k = 0$, per cui:

$$r\colon \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Il piano π è ortogonale a r. Si vede facilmente che parametri direttori di r sono $(2, 3, -1)$, per cui:

$$\pi\colon 2x + 3y - z - 6 = 0.$$

2. Si vede che la conica nascosta ha equazione $xy = 0$, per cui essa è spezzata. Inoltre, si ha che:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -h & -1 \\ -h & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = -1$ e l'unica conica spezzata del fascio è $xy = 0$. Troviamo i punti base del fascio intersecando $xy = 0$ con una qualsiasi conica del fascio:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Otteniamo $(0,0)$ tre volte e il punto $(1,0)$ una volta, per cui siamo nel caso in cui le coniche si osculano. Inoltre, $|A| = 2 - h^2$, per cui per $-\sqrt{2} < h < \sqrt{2}$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = \pm\sqrt{2}$ abbiamo due parabole; per $h < -\sqrt{2}$ e $h > \sqrt{2}$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = -h$ e $|A| = h(h+1)$. Quindi, per $h = -1$ abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $h = 0$, si ha $|B| = |A| = 0$, ma, essendo $\rho(B) = 3$ abbiamo un cilindro. Essendo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si vede che il vertice del cilindro è il punto $V = (0,1,0,0)$.

Sia $h \neq 0, -1$. Osserviamo che gli autovalori di A sono $1, h, h+1$, per cui sono concordi per $h > 0$. Dunque, per $h > 0$ abbiamo degli ellissoidi reali, in quanto $|B| < 0$. Per $h < 0$, $h \neq -1$, abbiamo degli iperboloidi iperbolici, in quanto $|B| > 0$.