CdL in Ingegneria Informatica (A-Co e J-Pr) - Ingegneria REA
Ingegneria Elettronica (A-Co e J-Pr) - Ingegneria Industriale (A-E e F-O)
Ingegneria Gestionale - Ingegneria Meccanica - Ingegneria Elettrica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 24 Marzo 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $v_1 = (2,1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0,1)$, $v_3 = (1,2,1,0)$ e $v_4 = (0,-1,1,-2)$ e l'endomorfismo f su $\mathbb{R}^4$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h,2,1,h) \\ f(v_2) &= (h,1,0,h) \\ f(v_3) &= (2h,1,1,0) \\ f(v_4) &= (-h,0,1,-2h). \end{aligned}$$

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
3. Posto $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - t = 0\}$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui f induce un endomorfismo g su W.
4. Studiare la semplicità di g, determinando, se possibile, una base di autovettori.
5. Quando f non è un isomorfismo, determinare $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.

Soluzione

1. È semplice vedere che:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

2. Dal momento che per $h \neq 0$ $M(f)$ è ridotta di rango 4, concludiamo che per $h \neq 0$ $\dim \operatorname{Im} f = 4$. Quindi, essendo $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^4$, deve essere $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$ e f è suriettiva. Inoltre, si ha $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0,0)\}$ e f è iniettiva. In particolare, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo.

   Sia $h = 0$. In tal caso:
$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   per cui $M(f)$ è ridotta di rango 2. In particolare, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $[(0,1,0,0),(0,0,1,0)]$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 2$ e si ha:
$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0,\, z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,0,0),(0,0,0,1)).$$

3. Si vede che:
$$W = \mathscr{L}((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)),$$
per cui:
$$f(W) = \mathscr{L}(f(1,0,0,1), f(0,1,0,1), f(0,0,1,0)).$$
Da:
$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$
otteniamo che $f(1,0,0,1) = (0,1,0,h)$. Analogamente, da:
$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$
otteniamo che $f(0,1,0,1) = (h,0,0,h)$. Inoltre, sappiamo che $f(0,0,1,0) = (0,0,1,0)$. Dunque:
$$f(W) = \mathscr{L}((0,1,0,h),(h,0,0,h),(0,0,1,0))$$
e f induce un endomorfismo g di W se $f(W) \subseteq W$, cioè se $(0,1,0,h),(h,0,0,h),(0,0,1,0) \in W$. È chiaro che $(h,0,0,h),(0,0,1,0) \in W$ per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$, mentre $(0,1,0,h) \in W$ solo per $h = 1$. Dunque, $h = 1$ è il valore cercato.

4. Siano $w_1 = (1,0,0,1)$, $w_2 = (0,1,0,1)$ e $w_3 = (0,0,1,0)$ e sia $\mathscr{A} = [w_1, w_2, w_3]$ una base di W. Se $g\colon W \to W$ è l'endomorfismo indotto da f per $h = 1$, allora abbiamo visto che:
$$\begin{aligned} g(w_1) &= f(w_1) = (0,1,0,1) = w_2 \\ g(w_2) &= f(w_2) = (1,0,0,1) = w_1 \\ g(w_3) &= f(w_3) = (0,0,1,0) = w_3. \end{aligned}$$
Dunque:
$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 0 \\ 1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2-1) = -(T+1)(1-T)^2.$$
Quindi, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che g è semplice se $\dim V_1 = m_1$ e $\dim V_{-1} = m_{-1}$. Inoltre, $1 \le \dim V_1 \le m_1$ e $1 \le \dim V_{-1} \le m_{-1}$, per cui certamente deve essere $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$, mentre $1 \le \dim V_1 \le 2$. g sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$.
Sia $T = 1$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} g_1$, dove $g_1 = g - i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(g_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(g_1)) = 1$ e $\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} g_1 = 3 - \rho(M^{\mathscr{A}}(g_1)) = 2 = m_1$. Quindi, g è semplice e possiamo determinare una base di autovettori. Dalla matrice $M^{\mathscr{A}}(g)$ abbiamo:
$$\begin{aligned} V_1 = \operatorname{Ker} g_1 &= \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ -a+b = 0\} = \\ &= \mathscr{L}((1,1,0)_{\mathscr{A}},(0,0,1)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(w_1+w_2, w_3) = \mathscr{L}((1,1,0,2),(0,0,1,0)). \end{aligned}$$
Sia $T = -1$. Sappiamo che $V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1}$, dove $g_{-1} = g + i$ e:
$$M^{\mathscr{A}}(g_{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{riducendo}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

e abbiamo:

$$V_{-1} = \operatorname{Ker} g_{-1} = \{w \in W \mid [w]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\, a + b = 0,\, 2c = 0\} =$$
$$= \mathscr{L}((1, -1, 0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(w_1 - w_2) = \mathscr{L}((1, -1, 0, 0)).$$

Una base di autovettori è $[(1, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0)]$.

5. Sia $h = 0$. Abbiamo visto che $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$, $\operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ e $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f = 2$. Dunque:

$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)(0, 0, 0, 1))$$

e chiaramente i 3 generatori individuano anche una base di $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$. Inoltre, deve essere:

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f - \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) = 1.$$

Dal momento che $(0, 1, 0, 0) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, deve essere necessariamente $\operatorname{Im} \cap \operatorname{Ker} f = \mathscr{L}((0, 1, 0, 0))$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta t ortogonale ed incidente le rette:

$$r\colon \begin{cases} y = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} y = 1 \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Determinare i punti $A = t \cap r$ e $B = t \cap s$.

2. Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio di coniche bitangenti alla conica $x^2 + y^2 + 4xy - 10x = 0$ nei punti $O = (0, 0)$ e $P = (-5, 5)$.

3. Scrivere le equazioni del cono di vertice $V = (0, 0, 1, 1)$ e del cilindro di vertice $V' = (0, 0, 1, 0)$ aventi entrambi come direttrice la conica:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1. Osserviamo che le rette r e s hanno parametri direttori, rispettivamente, $(1, 0, -1)$ e $(1, 0, 2)$. Inoltre, il generico punto della retta r è $R = (a, 0, 1 - a)$ e il generico punto di s è $S = (b, 1, 2b + 1)$, per cui la retta RS ha parametri direttori $(a - b, -1, -a - 2b)$: Vogliamo che la retta RS sia perpendicolare ad entrambe le rette r e s, per cui deve essere:

$$\begin{cases} a - b + a + 2b = 0 \\ a - b - 2a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

Quindi, questo vuol dire che $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ e la retta cercata è:

$$t = AB\colon \begin{cases} x = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

2. La retta OP ha equazione $x + y = 0$, per cui una delle due coniche spezzate del fascio ha equazione $(x + y)^2 = 0$ e il fascio di coniche ha equazione:

$$x^2 + y^2 + 4xy - 10x + h(x + y)^2 = 0 \Rightarrow (h + 1)x^2 + (h + 1)y^2 + (2h + 4)xy - 10x = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} h+1 & h+2 & -5 \\ h+2 & h+1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} h+1 & h+2 \\ h+2 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Si vede che $|B| = -25(h+1)$ e che $|A| = -2h-3$. Quindi, per $h = -1$ abbiamo l'altra conica spezzata del fascio che ha equazione $x(y-5) = 0$; per $h > -\frac{3}{2}$, $h \neq -1$, abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera; per $h = -\frac{3}{2}$ abbiamo una parabola; per $h < -\frac{3}{2}$ abbiamo delle ellissi, ovviamente tutte reali, tra le quali abbiamo una circonferenza per $h = -2$.

3. Il generico punto della conica Γ è $P = (\alpha, \beta, 0)$, dove:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 8\beta - 5 = 0. \tag{1}$$

La retta PV ha equazioni:

$$PV\colon \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = -(z-1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{1-z} \\ \beta = \dfrac{y}{1-z}. \end{cases}$$

Sostituendo in (1) abbiamo:

$$\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} - 4\frac{x}{1-z} + 8\frac{y}{1-z} - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x(1-z) + 8y(1-z) - 5(1-z)^2 = 0,$$

che è l'equazione del cono cercato. Invece, la retta PV' ha equazione:

$$PV'\colon \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta. \end{cases}$$

Sostituendo $\alpha = x$ e $\beta = y$ in (1), otteniamo l'equazione del cilindro cercato:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0.$$