CdL in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova scritta di Algebra lineare e Geometria- 20 Giugno 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,2,2) &= (1,3,3) \\ f(1,-1,-1) &= (1,-3,-3) \\ f(0,1,2) &= (0,h+1,3) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Calcolare $f^{-1}(3,1,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Discutere la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. In particolare, determinare una base di autovettori nel caso in cui f è semplice e ha un autospazio associato di dimensione 2.
4. Si consideri il sottospazio $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Verificare che la restrizione $f|_V$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ che non dipende dal parametro h.
5. Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $g'\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g' \circ f = 2i$, dove $i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'identità.

Soluzione

1. Dalle condizioni date troviamo che.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-h & h-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

per cui $|M(f)| = 4 - 2h$. Dunque, per $h \neq 2$ f è un isomorfismo, il che vuol dire che f è iniettiva e suriettiva e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Sia $h = 2$. In tal caso:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(f)) = 2$ e una sua base è data da $[(1,-1,-1),(0,1,1)]$ e una sua equazione cartesiana è:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z - y = 0,$$

per cui $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - z = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$ e:

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\ y + z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,-1)).$$

2. Occorre risolvere il sistema la cui matrice completa associata è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3-h & h-1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riducendo e scambiando due righe}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4-2h & 0 & 8-4h \end{array}\right).$$

Dunque, per $h \neq 2$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y + z = 4 \\ (4-2h)y = 8-4h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 2. \end{cases}$$

Dunque, per $h \neq 2$ si ha $f^{-1}(3,1,1) = \{(3,2,2)\}$.

Sia $h = 2$. In tal caso, $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$ e il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x = 3 \\ y + z = 4, \end{cases}$$

per cui:

$$f^{-1}(3,1,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3,\ y+z = 4\} = \{(3,y,4-y) \in \mathbb{R}^3\}.$$

3. Il polinomio caratteristico è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ -1 & 3-h-T & h-1 \\ -1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)[T^2 + (h-4)T + 4 - 2h],$$

che ammette come soluzioni 1, 2, $2-h$. Tali soluzioni sono tutte distinte tre loro per $h \neq 0, 1$, per cui per $h \neq 0, 1$ f è certamente semplice e in questo caso tutti gli autospazi hanno dimensione 1.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Essendo certamente $\dim V_1 = m_1 = 1$, f sarà semplice se $\dim V_2 = m_2 = 2$, laddove sappiamo che in generale $1 \leq \dim V_2 \leq m_2 = 2$. Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_2)) = 2$ e $\dim V_2 = 3 - \rho(M(f_2)) = 1 < 2 = m_2$. Questo significa che per $h = 0$ f non è semplice e non ammette una base di autovettori.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e 2, con $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Essendo certamente $\dim V_2 = m_2 = 1$, f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$, laddove sappiamo che in generale $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, dove $f_1 = f - i$ e:

$$M(f_1) = M(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M(f_1)) = 1$ e $\dim V_1 = 3 - \rho(M(f_1)) = 2 = m_1$. Questo significa che per $h = 1$ f è semplice ed esiste una base di autovettori. Dalla matrice precedente sappiamo che:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y = 0\} = \mathscr{L}((1,1,0),(0,0,1)).$$

Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} f_2$, dove $f_2 = f - 2i$ e:

$$M(f_2) = M(f) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui:

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x = 0,\ y - z = 0\} = \mathscr{L}((0,1,1)).$$

Quindi, una base di autovettori per $h = 1$ è $[(1,1,0),(0,0,1),(0,1,1)]$.

4. Sappiamo che:
$$V = \mathscr{L}((1,0,0),(0,1,1)) \Rightarrow f(V) = \mathscr{L}(f(1,0,0), f(0,1,1)).$$
Sappiamo che $f(1,0,0) = (1,-1,-1) \in V$, in quanto verifica la sua equazione cartesiana, e si vede che $f(0,1,1) = (0,2,2) \in V$, in quanto anch'esso verifica la sua equazione cartesiana. Dunque, l'endomorfismo $g\colon V \to V$ indotto dalla restrizione $f|_V$ è definito dalle assegnazioni:
$$\begin{aligned} g(1,0,0) &= f|_V(1,0,0) = f(1,0,0) = (1,-1,-1) \\ g(0,1,1) &= f|_V(0,1,1) = f(0,1,1) = (0,2,2) \end{aligned}$$
ed è evidente che g non dipende dal parametro h.

5. $g' \circ f = 2i \Rightarrow |M(g')| \cdot |M(f)| = |M(2i)| = |2I| = 8 \neq 0$. Dunque, perché g' esista deve essere $|M(f)| \neq 0$. Viceversa, se $|M(f)| \neq 0$, allora f è invertibile ed esiste f^{-1} tale che $f^{-1} \circ f = i$. Dunque, $2(f^{-1} \circ f) = 2i$, cioè $(2f^{-1}) \circ f = 2i$. Quindi, g' esiste solo quando f è invertibile, cioè solo per $h \neq 2$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni della retta r passante per $P = (2,1,1)$ e parallela ai piani $\alpha\colon 2x - y + z - 1 = 0$ e $\beta\colon x - 2y - z + 2 = 0$ e determinare la distanza di $Q = (3,1,2)$ dalla retta r.

2. Determinare le equazioni del fascio di coniche aventi l'asse $\vec{x}$ come asintoto e tangenti in $P = (-1,-2,0)$ alla retta $y - 3x - 1 = z = 0$.

3. Detta Γ la conica del fascio passante per $A = (1,2,0)$, determinare il suo centro di simmetria, gli assi di simmetria e una sua equazione canonica.

4. Studiare la quadrica Q luogo delle rette incidenti le rette:
$$r\colon \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$
e perpendicolari alla retta:
$$t\colon \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Soluzione

1. La retta r è intersezione del piano π_1 parallelo ad α e passante per P con il piano π_2 parallelo a β e passante per P.

   I piani paralleli ad α hanno equazione $2x - y + z + k = 0$. Imponendo il passaggio per P otteniamo $k = -4$, per cui $\pi_1\colon 2x - y + z - 4 = 0$. Analogamente, i piani paralleli a β hanno equazione $x - 2y - z + k = 0$. Imponendo il passaggio per P troviamo $k = 1$. Dunque:
$$r = \pi_1 \cap \pi_2\colon \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$$
   Da ciò vediamo facilmente che parametri direttori di r sono $(1,1,-1)$. Per cui il piano π perpendicolare a r e passante per Q ha equazione $x + y - z - 2 = 0$. Cerchiamo $H = \pi \cap r$:
$$H = \pi \cap r\colon \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$
   Dunque, $H = (2,1,1)$ e:
$$d(Q,r) = \overline{HQ} = \sqrt{2}.$$

2. Le coniche spezzate del fascio sono quella data dall'unione delle due tangenti, cioè $y(y-3x-1)=0$, e quella data dalla retta passante per P e per il punto improprio dell'asintoto $y=0$ contata due volte. Dato che tale retta ha equazione $y+2=0$, la seconda conica spezzata ha equazione $(y+2)^2=0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$\lambda y(y-3x-1)+\mu(y+2)^2=0.$$

3. Imponendo il passaggio per il punto A nell'equazione del fascio di coniche troviamo:

$$-4\lambda+16\mu=0 \Rightarrow \lambda=4\mu.$$

Prendendo $\mu=1$ e $\lambda=4$, vediamo che la conica Γ ha equazione:

$$4y(y-3x-1)+(y+2)^2=0 \Rightarrow 5y^2-12xy+4=0.$$

Le matrici associate alla conica sono:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B|=-144$ e $|A|=-36$, vediamo che la conica (necessariamente irriducibile) è un'iperbole. La sua forma ridotta è del tipo $\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$, dove $|B|=-\alpha\beta\gamma$ e $|A|=\alpha\beta$. Dunque:

$$\gamma=-\frac{|B|}{|A|}=-4$$

e α e β sono gli autovalori di A:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} -T & -6 \\ -6 & 5-T \end{vmatrix}=T^2-5T-36,$$

dove essi sono -4 e 9. Dunque, scegliendo $\alpha=-4$ e $\beta=9$, vediamo che una forma ridotta di Γ è $-4X^2+9Y^2=-4$, da cui otteniamo la sua equazione canonica:

$$X^2-\frac{9}{4}Y^2=1.$$

Per quel che riguarda il centro di simmetria occorre risolvere il sistema associato alle prime due righe di Γ:

$$\begin{cases} -6y=0 \\ -6x+5y=0, \end{cases}$$

cioè il centro di simmetria è l'origine $O=(0,0)$. Per quanto riguarda gli assi di simmetria, essi sono le rette parallele agli autospazi di A e passanti per O.

Per quanto riguarda l'autovalore $T=-4$ vediamo che:

$$A+4I=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix},$$

per cui l'autospazio associato ha equazione $4x-6y=0$ e un primo asse di simmetria ha equazione $2x-3y=0$.

Per quanto riguarda l'autovalore $T=9$ vediamo che:

$$A-4I=\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix},$$

per cui l'autospazio associato ha equazione $-9x-6y=0$ e il secondo asse di simmetria ha equazione $3x+2y=0$.

4. Il generico punto di r è $R = (a, 1, a)$ e di s è $S = (b, 2, 2b)$. La retta cercata è del tipo RS ad ha parametri direttori $(a-b, -1, a-2b)$. Vogliamo che il vettore che ha queste componenti sia ortogonale al vettore di componenti $(1, 0, 0)$. Dunque, deve essere il prodotto scalare dei due vettori pari a 0, cioè si ha:

$$a - b = 0.$$

Quindi, le rette cercate sono quelle individuate da punti del tipo $R = (a, 1, a)$ e $S = (a, 2, 2a)$. Esse hanno equazioni:

$$\begin{cases} x = a \\ y - 1 = \dfrac{z-a}{a}. \end{cases}$$

Sostituendo $a = x$ nella seconda equazione troviamo:

$$y - 1 = \frac{z-x}{x} \Rightarrow xy - z = 0.$$

Questa è l'equazione del luogo cercata. Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $|B| = \frac{1}{16} > 0$ e $|A| = 0$, la quadrica è un paraboloide iperbolico.