CdL in Ingegneria Informatica (A-Co, Cp-I e J-Pr) - Ingegneria REA Ingegneria Elettronica (A-Co, Cp-I e J-Pr) - Ingegneria Industriale (A-E e F-O) Ingegneria Gestionale - Ingegneria Meccanica - Ingegneria Elettrica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 17 Febbraio 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Dire per quali valori del parametro reale h le assegnazioni

$$\begin{cases} v_1 = (h,0,1) \in V_1 & \text{è autovettore rispetto all'autovalore} \quad T = 1, \\ v_2 = (1,1,0) \in V_2 & \text{è autovettore rispetto all'autovalore} \quad T = 2, \\ f(e_1) = f(1,0,0) = (0,2,2) \end{cases}$$

definiscono un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

2. Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

3. Studiare la semplicità di f e determinare, quando possibile, una base di autovettori.

4. Calcolare, al variare di h, la controimmagine

$$f^{-1}(h-1,h,0) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (h-1,h,0)\}.$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e il piano $\pi : 3x + 6y + z - 1 = 0$, mostrare che r e π sono paralleli e determinare la proiezione ortogonale di r su π.

2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio ϕ delle coniche che passano per $A \equiv (1,0)$ con tangente $x + 2y - 1 = 0$, per $B \equiv (0,2)$ e per $O \equiv (0,0)$. Studiare il luogo dei centri di simmetria delle coniche del fascio ϕ.

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$x^2 + ky^2 + 4yz + y + 2kz = 0.$$

Soluzione

1. Sono assegnate le immagini di tre vettori e affinchè f sia definito dobbiamo richiedere che questi tre vettori siano indipendenti. Si vede facilmente che ciò si verifica per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

2. Possiamo scegliere se determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica oppure quella rispetto alla base $\mathcal{A} = [v_1, v_2, e_1]$. Scegliamo quest'ultima possibilità e indicheremo tra parentesi quadre le componenti dei vettori rispetto alla base canonica. Dai dati si ha

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 \\ f(v_2) = v_2 \\ f(e_1) = (0,2,2) = 2v_1 + 2v_2 + (-2h-2)e_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2h-2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che decidendo di usare la base canonica si ottiene la matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & h \\ 2 & 0 & -2h \\ 2 & -2 & 1-2h \end{pmatrix}.$$

Quindi $|M(f)| = -4h - 4$ allora se $h \neq -1$ f è un isomorfismo; per $h = -1$ si ha

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(v_2, 2v_2) \qquad \ker f = \{(2y, y, -y)_A\} = \mathcal{L}(2v_1 + v_2 - e_1)$$

3. Il polinomio caratteristico è:

$$(T-1)(T-2)(-T-2h-2) = 0$$

Gli autovalori di f sono $T = 1, 2, -2h-2$; per $h \neq -\frac{3}{2}, -2$ questi autovalori sono distinti, quindi f è semplice. Ovviamente sappiamo che $V_1 = \mathcal{L}(v_1)$, $V_2 = \mathcal{L}(v_2)$ quindi dobbiamo calcolare solo il terzo autospazio.
$T = -2h - 2$

$$\begin{pmatrix} 2h+3 & 0 & 2 \\ 0 & 2h+4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{-2h-2} = \mathcal{L}\left(-\frac{2}{2h+3}v_1 - \frac{1}{h+2}v_2 + e_1\right)$$

Per $h = -\frac{3}{2}$ si ha l'autovalore $T = 1$ doppio; si verifica subito che l'autospazio associato ha dimensione 1, quindi f non è semplice.
Per $h = -2$ si ha l'autovalore $T = 2$ doppio; si verifica subito che l'autospazio associato ha dimensione 1, quindi f non è semplice.

4. Osservato che $(h-1, h, 0) = hv_2 - e_1$ dobbiamo risolvere il facile sistema lineare associato alla matrice completa

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & h \\ 0 & 0 & -2h-2 & -1 \end{array}\right)$$

$$h \neq -1 \Rightarrow f^{-1}(hv_2 - e_1) = \{-\tfrac{1}{1+h}v_1 + \tfrac{h^2+h-1}{2(h+1)}v_2 + \tfrac{1}{2(h+1)}e_1\} = \{(\tfrac{h(h-1)}{2(h+1)}, \tfrac{h^2+h-1}{2(1+h}, -\tfrac{1}{1+h})\}$$

$$h = -1 \Rightarrow f^{-1}(-v_2 - 2e_1) = \emptyset$$

II

1. La retta r ha parametri direttori $(-2, 1, 0)$, mentre il vettore di componenti $(3, 6, 1)$ è perpendicolare al piano π. Una semplice verifica mostra che retta e piano sono paralleli tra loro. Cerchiamo il piano π_1 contenente r e perpendicolare a π. I piani contenenti r hanno equazione $\lambda x + 2\lambda y + \lambda + \mu z = 0$. Il vettore di componenti $(\lambda, 2\lambda, \mu)$ deve essere perpendicolare al vettore di componenti $(3, 6, 1)$, per cui deve essere $15\lambda + \mu = 0$. Prendendo $\lambda = 1$ e $\mu = -15$ troviamo che $\pi_1 \colon x + 2y - 15z + 1 = 0$ e la proiezione di r sul piano π è la retta:

$$\pi \cap \pi_1 \colon \begin{cases} x + 2y - 15z + 1 = 0 \\ 3x + 6y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Siamo nel caso della tangenza, quindi nel fascio ϕ ci sono solo due coniche spezzate e distinte. Queste le usiamo per scrivere l'equazione del fascio:

$$hx(x+2y-1)+y(2x+y-2)=0$$

da cui avremo $hx^2+y^2+2(h+1)xy-hx-2y=0$.
Una volta note le coniche spezzate non occorre calcolare il determinante di B (in ogni caso $|B|=\frac{3h^2}{4}$)e ovviamente non occorre trovare i punti base del fascio dato che si trovano nel testo.Dobbiamo solo caratterizzare le coniche irriducibili con il determinante di A.
$|A|=-h^2-h-1$.

- $|A|>0$, cioè $-h^2-h-1>0$ la disequazione non ammette soluzioni quindi non troviamo ELLISSI;
- $|A|<0$ cioè $-h^2-h-1<0$ per ogni valore di $h\neq 0$ si hanno IPERBOLI. Per $h=-1$ si ha l'iperbole equilatera $-x^2+y^2+x-2y=0$;
- $|A|=0$ l'equazione non ammette soluzioni reali quindi non troviamo nel fascio la PARABOLA.
  Luogo dei centri:

$$\begin{cases} hx+(h+1)y-\frac{h}{2}=0 \\ (h+1)x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=\frac{1-x-y}{x} \\ -x-y+1+\frac{y}{x}(1-x-y)+y-\frac{1-x-y}{2x}=0 \end{cases}$$

  da cui si ottiene la seguente conica:

$$2x^2+2y^2+2xy-3x-3y+1=0$$

  Con facili calcoli si ottengono
  $|B|=-\frac{3}{2}$ e $|A|=3$ quindi la conica è un'ellisse.

3. Consideriamo la matrice associata al fascio di quadriche

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & k \\ 0 & \frac{1}{2} & k & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |B|=2k-k^3=k(2-k^2) \\ \\ |A|=-4 \end{array}$$

per cui $|B|>0$ per $k<-\sqrt{2}$, $0<k<\sqrt{2}$; in questi intervalli si hanno punti iperbolici mentre per $-\sqrt{2}<k<0$, $k>\sqrt{2}$ si hanno punti ellittici. In particolare:

- Se $k=0,\pm\sqrt{2}$ sono quadriche degeneri e poichè hanno tutte $|A|\neq 0$ si tratta di tre coni;
- Se $k\neq 0,\pm\sqrt{2}$ non si hanno paraboloidi, trattasi quindi di ellissoidi o iperboloidi. A questo scopo calcoliamo il polinomio caratteristico della sottomatrice A per capire che segno hanno gli autovalori:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 0 & k-T & 2 \\ 0 & 2 & -T \end{vmatrix}=$$
$$=-T^3+(k+1)T^2+(4-k)T-4=0.$$

Applicando la regola dei segni di Cartesio si nota che non potranno mai essere tutte variazioni ma solo tutte permanenze quindi imponiamo le seguenti condizioni affinchè siano ellissoidi

$$\begin{cases} k+1<0 \\ k-4>0 \end{cases}$$

E' evidente che il sistema non ammette soluzioni, quindi per $k<-\sqrt{2}$, $0<k<\sqrt{2}$ si hanno iperboloidi iperbolici (dato che in questi intervalli il $|B|>0$) e per $-\sqrt{2}<k<0$, $k>\sqrt{2}$ si hanno iperboloidi ellittici ($|B|<0$).