CdL in Ingegneria Informatica (A-Co e J-Pr) -
- Ingegneria Elettronica (A-Co e J-Pr) e Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Luglio 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

Compito A

I

È dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (0, hx - 2y + z, (h-1)x + 2y - z)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare, ove possibile, una base di autovettori.
2. Dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da
$$g(x,y,z) = (hx + y, y - z, z)$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare e studiare $\varphi = g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ al variare di h.
3. Dato $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$ calcolare $\varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$ determinando le sue equazioni cartesiane al variare di h.
4. Determinare il valore di h per cui $\operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Date le rette:
$$r\colon \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$
e dato il punto $P = (2,0,2)$ determinare la retta t incidente r e s e passante per P.
2. Dati, nel piano $z = 0$, i punti $O = (0,0)$, $A = (0,2)$, $B = (1,-1)$ e $C = (1,3)$, determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti O, A, B e C.
3. Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + 3hy^2 + 4hyz + 4x - y = 0.$$

SVOLGIMENTO

I

1. Si calcola facilmente il polinomio caratteristico:
$$P(T) = -T^3 - T^2 = 0 \Rightarrow T^2(T+3) = 0$$
Gli autovalori sono $0, -3$ ed hanno molteplicità algebrica rispettivamente 2 ed 1, per cui f è semplice se e solo se $\dim V_0 = 2$. Calcoliamo l'autospazio V_0. Se $h \neq \frac{1}{2}$, si ha $\dim V_0 = 1$, per cui f non è semplice; se $h = \frac{1}{2}$ si ha $\dim V_0 = 2$, per cui f è semplice.
Quindi, se $h = \frac{1}{2}$, abbiamo $V_0 = \operatorname{Ker} f = \{(x, y, 2y - \frac{1}{2}x)\}$ e $V_{-3} = \{(0, y, -y)\}$. Dunque, la base di autovettori esiste solo per $h = \frac{1}{2}$ ed è data da $\mathcal{A} = [(1, 0, -\frac{1}{2}), (0, 1, 2), (0, 1, -1)]$.

2. Calcoliamo:
$\varphi(e_1) = g(f(e_1)) = g(0, h, h-1) = (h, 1, h-1)$
$\varphi(e_2) = g(f(e_2)) = g(0, -2, 2) = (2, -4, 2)$,
$\varphi(e_3) = g(f(e_3)) = g(0, 1, -1) = (1, 2, -1)$. Dunque:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} h & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ h-1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e si ha $|M(\varphi)| = 0$ per ogni valore di h. Quindi, il rango della matrice è sempre minore di 3: ciò vuol dire che φ non sarà mai un isomorfismo. Notiamo facilmente (riducendo) che per $h \neq \frac{1}{2}$ si ha $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M(\varphi)) = 2$, con $\operatorname{Im} \varphi = \mathcal{L}((h, 1, h-1), (1, 2, -1))$ e $\operatorname{Ker} \varphi = \{(0, y, 2y)\}$.

Per $h = \frac{1}{2}$ si ha $\rho(M(\varphi)) = 1$, con $\operatorname{Im} \varphi = \mathcal{L}((1, 2, -1))$ e $\operatorname{Ker} \varphi = \{(x, y, 2y - \frac{1}{2}x)\}$.

3. Osservato che $V = \{(x, x, z)\}$, dobbiamo calcolare le seguenti immagini di una sua base:
$\varphi(1, 1, 0) = (h-2, -3, h+1)$
$\varphi(0, 0, 1) = (1, 2, -1)$
ed avremo $f(V) = \mathcal{L}((h-2, -3, h+1), (1, 2, -1))$. Per $\dim f(V)$ avremo:

$$\begin{pmatrix} h-2 & -3 & h+1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ che ha rango 2 per ogni } h \neq \tfrac{1}{2}.$$

Dunque, per $h \neq \frac{1}{2}$ $\dim f(V) = 2$ e una sua base è data da $(h-2, -3, h+1), (1, 2, -1)$. Inoltre, da:

$$\begin{vmatrix} h-2 & -3 & h+1 \\ 1 & 2 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-2h)x + (2h-1)y + (2h-1)z = 0,$$

vediamo che $f(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$. Invece, per $h = \frac{1}{2}$ abbiamo che $\dim f(V) = 1$ e da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x+z & y+2z & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo che $f(V) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0, y + 2z = 0\}$.

4. Per $h \neq \frac{1}{2}$ le equazioni cartesiane del $\operatorname{Ker} \varphi$ sono $x = z - 2y = 0$ e l'equazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$ è $(1-2h)x + (2h-1)y + (2h-1)z = 0$. Calcolando $\operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi$ (è sufficiente mettere a sistema le loro equazioni cartesiane) otteniamo che per $h \neq \frac{1}{2}$ si ha $\operatorname{Ker} f\varphi \cap \operatorname{Im} \varphi = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Inoltre, poiché $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ e $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$ avremo $\operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^3$.

Facilmente si osserva che se $h = \frac{1}{2}$ si ha $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1$. Inoltre, l'equazione cartesiana del $\operatorname{Ker} \varphi$ sono $\frac{1}{2}x - 2y + z = 0$ e le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} \varphi$ sono $x + z = y + 2z = 0$. Calcolando l'intersezione avremo $\operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ quindi $\operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^3$..

II

1. Osserviamo che le due rette sono sgembe. Infatti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0;.$$

Questo ci assicura che la retta è una sola. Per trovare t la cosa più semplice da fare è individuarla come intersezione di due piani. Precisamente, se π_1 è il piano contenente r e passante per P e se π_2 è il piano contenente s e passante per P, allora la retta t è data come intersezione dei due piani.

Cerchiamo il piano π_1: il fascio di piani contenente r è dato da $\lambda(x+z-1)+\mu(y+1)=0$ e imponendo il passaggio per P otteniamo $3\lambda+\mu=0$. Da qui abbiamo $\mu=-3\lambda$ e sostituendo otteniamo l'equazione di $\pi_1\colon x-3y+z-4=0$.

In modo analogo troviamo $\pi_2\colon 3x+2y-2z-2=0$. Dunque, la retta t è data quindi da

$$t\colon \begin{cases} x-3y+z-4=0 \\ 3x+2y-2z-2=0. \end{cases}$$

2. Le equazioni delle rette OA, BC, OB e AC sono, rispettivamente, $x=0$, $x=1$, $x+y=0$ e $x-y+2=0$. Quindi, il fascio di coniche ha equazione:

$$x(x-1)+h(x+y)(x-y+2)=0 \Rightarrow (h+1)x^2-hy^2-(2h-1)x+2hy=0.$$

La matrice associata è:

$$B=\begin{pmatrix} h+1 & 0 & \frac{2h-1}{2} \\ 0 & -h & h \\ \frac{2h-1}{2} & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $|B|=-2h^2+\frac{1}{4}h$, vediamo che le coniche spezzate del fascio si ottengono per $h=\infty$, $h=0$ e per $h=\frac{1}{8}$.

Dal momento che $|A|=-h(h+1)$, allora vediamo che per $-1<h<0$ abbiamo delle ellissi (tutte reali) e che per $h=-\frac{1}{2}$ abbiamo una circonferenza. Per $h=-1$ abbiamo una parabola. Per $h<-1$ e $h>0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

3. Le matrici associate sono:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3h & 2h & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2h & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3h & 2h \\ 0 & 2h & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B|=16h^2$ e $|A|=-4h^2$. Ciò implica che per $h=0$ abbiamo un cilindro avente la conica all'infinito (C_∞) spezzata in due rette reali e coincidenti, per cui si tratta di un cilindro parabolico.

Sia $h\neq 0$, per cui $|B|\neq 0$ e $|A|\neq 0$. Si vede che:

$$P_A(T)=\begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 \\ 1 & 3h-T & 2h \\ 0 & 2h & -T \end{vmatrix}=(1-T)(T^2-3hT-4h^2).$$

Notiamo che tra gli autovalori di A c'è 1, per cui gli ellissoidi si avranno solo nel caso in cui gli altri due autovalori sono entrambi positivi e quindi occorrono due variazioni (regola dei segni di Cartesio). Ma questo è impossibile, poiché si vede chiaramente che $-4h^2>0$ non ammette soluzioni. Quindi, per $h\neq 0$ abbiamo iperboloidi. In particolare, si ha $|B|>0$ per ogni $h\neq 0$ e abbiamo iperboloidi iperbolici per ogni $h\neq 0$.

Avremmo anche potuto osservare che, essendo $|B|>0$ e $|A|\neq 0$ per ogni $h\neq 0$, possiamo avere solo iperboloidi iperbolici o ellissoidi immaginari. Tuttavia, le quadriche passano per l'origine e questo vuol dire che non possiamo avere ellissoidi immaginari e si conclude immediatamente che le quadriche sono tutte iperboloidi iperbolici.