CdL in Ingegneria Informatica (J-Pr) - Ingegneria Elettronica (J-Pr) e Ingegneria REA

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Settembre 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ e il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ avente $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ coma base. È assegnato, inoltre, l'endomorfismo $f\colon V \to V$ individuato da:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & 2h-2 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di h determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3. Dato $w = v_1 + hv_2 - hv_3 \in V$, calcolare $f^{-1}(w)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4. Dato $U = \mathscr{L}(v_2, v_3) \subset V$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale la restrizione $f|_U$ di f a U induce un endomorfismo $g\colon U \to U$.

Soluzione

1. Dato che $\det M^{\mathscr{A}}(f) = -h^2$, per $h \neq 0$ f è un isomorfismo, cioè f è iniettiva e suriettiva. In particolare, $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Calcoliamo l'equazione cartesiana di V:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t - z = 0,$$

per cui per $h \neq 0$ si ha $\operatorname{Im} f = V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - z = 0\}$.
Sia $h = 0$. In tal caso:

$$M^{\mathscr{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\dim \operatorname{Im} f = \rho(M^{\mathscr{A}}(f)) = 1$ e si ha:

$$\operatorname{Im} f = \mathscr{L}((1, 0, 0)_{\mathscr{A}}) = \mathscr{L}(v_1).$$

Da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y-x & z & t \end{pmatrix},$$

vediamo che per $h = 0$ si ha $\operatorname{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - x = z = t = 0\}$. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ e si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a - b - 2c = 0\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (b + 2c, b, c)\} = \\ = \mathscr{L}(v_1 + v_2, 2v_1 + v_3) = \mathscr{L}((1, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 1)).\end{aligned}$$

Inoltre, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y - 2t & z - t & 0 \end{pmatrix},$$

vediamo che $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 2t = z - t = 0\}$.

2. Da:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 1 - T & h - 1 & 2h - 2 \\ 0 & -T & h \\ 0 & h & -T \end{vmatrix} = (1 - T)(T^2 - h^2),$$

vediamo che gli autovalori sono $1, h, -h$. Essi sono tutti distinti di molteplicità algebrica 1 per $h \neq 0, 1, -1$, per cui per $h \neq 0, 1, -1$ f è semplice.

Sia $h = 1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, per cui $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Invece, $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$ e f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 1$ e $\dim V_1 = 3 - 1 = 2 = m_1$, per cui per $h = 1$ f è semplice.

Sia $h = -1$. In tal caso, gli autovalori sono 1 e -1, con $m_1 = 2$ e $m_{-1} = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_{-1} \leq m_{-1} = 1$, per cui $\dim V_{-1} = m_{-1} = 1$. Invece, $1 \leq \dim V_1 \leq 2 = m_1$ e f sarà semplice se $\dim V_1 = m_1 = 2$. Sappiamo che $V_1 = \operatorname{Ker} f_1$, $f_1 = f - i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(f_1) = M^{\mathscr{A}}(f) - I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\rho(M^{\mathscr{A}}(f_1)) = 2$ e $\dim V_1 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1$, per cui per $h = -1$ f non è semplice.

Sia $h = 0$. In tal caso, gli autovalori sono 0 e 1, con $m_0 = 2$ e $m_1 = 1$. Sappiamo che $1 \leq \dim V_1 \leq m_1 = 1$, per cui $\dim V_1 = m_1 = 1$. Inoltre, sappiamo anche che $V_0 = \operatorname{Ker} f$ e abbiamo visto che per $h = 0$ $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Dunque, in particolare anche che $\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} f = 2 = m_0$. Quindi, per $h = 0$ f è semplice.

3. Dato che $[w]_{\mathscr{A}} = (1, h, -h)$, per calcolare $f^{-1}(w)$ occorre risolvere il sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h - 1 & 2h - 2 & 1 \\ 0 & 0 & h & h \\ 0 & h & 0 & -h \end{array}\right).$$

Sia $h \neq 0$. Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} a + (h - 1)b + (2h - 2)c = 1 \\ hc = h \\ hb = -h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 - h \\ b = -1 \\ c = 1, \end{cases}$$

per cui:

$$f^{-1}(w) = \{(2 - h)v_1 - v_2 + v_3\} = \{(2 - h, 1 - h, 0, 0)\}.$$

Sia $h = 0$. In tal caso:

$$\begin{aligned}f^{-1}(w) = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, b, c),\ a - b - 2c = 1\} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (b + 2c + 1, b, c)\} = \\ = \{(b + 2c + 1)v_1 + bv_2 + cv_3\} = \{(b + 2c + 1, 2b + 2c + 1, b + c, b + c) \in \mathbb{R}^4\}.\end{aligned}$$

4. Sappiamo che $f|_U$ induce un endomorfismo di U se $f(U) \subseteq U$, dove $f(U) = \mathscr{L}(f(v_2), f(v_3))$. Dunque, $f(U) \subseteq U$ se e solo se $f(v_2), f(v_3) \in U$:

$$f(v_2) = (h-1)v_1 + v_3 \in U = \mathscr{L}(v_2, v_3) \Leftrightarrow (h-1)v_1 \in \mathscr{L}(v_2, v_3)$$
$$f(v_3) = (2h-2)v_1 + v_3 \in U = \mathscr{L}(v_2, v_3) \Leftrightarrow (2h-2)v_1 \in \mathscr{L}(v_2, v_3).$$

Dato che v_1, v_2 e v_3 individuano una base di V, essi sono linearmente indipendenti e, quindi, $v_1 \notin \mathscr{L}(v_2, v_3)$. Quindi, $(h-1)v_1 \in \mathscr{L}(v_2, v_3)$ se e solo se $h = 1$ e, analogamente, $(2h-2)v_1 \in \mathscr{L}(v_2, v_3)$ se e solo se $h = 1$. Concludiamo, dunque, che per $h = 1$ $f|_U$ induce un endomorfismo g di U.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati:

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0, \end{cases}$$

$\pi\colon x - z + 1 = 0$ e $P = (1, 0, 1)$, determinare il piano π' parallelo a r, perpendicolare a π e passante per P. Calcolare la distanza $d(r, \pi')$.

2. Sul piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio ϕ delle coniche che sono tangenti alle rette $r\colon 2x + y - 1 = z = 0$ e $s\colon x - y + 1 = z = 0$ nei punti in cui esse incontrano l'asse $\vec{x}$. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

3. Sia:

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Determinare e studiare la quadrica contenente Γ, le rette $p_1\colon x + 2 = y = 0$ e $p_2\colon x = y + 2 = 0$ e il punto $A = (1, 1, -1)$.

Soluzione

1. La retta r ha parametri direttori $(1, 5, 4)$ e le componenti di un vettore ortogonale a π sono $(1, 0, -1)$. Dunque, se (a, b, c) sono le componenti di un vettore ortogonale a π', deve essere:

$$\begin{cases} a + 5b + 4c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ b = -a. \end{cases}$$

Dunque, $(1, -1, 1)$ sono componenti di un vettore ortogonale a π' e si ha:

$$\pi'\colon x - 1 - y + z - 1 = 0 \Rightarrow \pi'\colon x - y + z - 2 = 0.$$

Dato che $r \parallel \pi'$, la distanza $d(r, \pi')$ è la distanza di un suo punto qualsiasi da π'. Osservato, per esempio, che $(0, 0, 0) \in r$, si ha:

$$d(r, \pi') = d(O, \pi') = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Il fascio di coniche ha equazione:

$$(2x + y - 1)(x - y + 1) + hy^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - xy + (h-1)y^2 + x + 2y - 1 = 0.$$

Le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione. Dunque, sappiamo che $|B| = 0$ solo per $h = 0$. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & h - 1 \end{vmatrix} = 2h - \frac{9}{4}.$$

Quindi, per $h > \frac{9}{8}$ abbiamo delle ellissi, nessuna delle quali è una circonferenza; per $h = \frac{9}{8}$ abbiamo una parabola; per $h < \frac{9}{8}$, $h \neq 0$, abbiamo delle iperboli, tra le quali troviamo quella equilatera per $h = -1$.

L'iperbole equilatera ha equazione $2x^2 - xy - 2y^2 + x + 2y - 1 = 0$, per cui la matrice associata è:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il centro di simmetria si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \\ -\frac{1}{2}x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{17} \\ y = \frac{9}{17}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è $C = (-\frac{2}{17}, \frac{9}{17})$.

3. Le quadriche contenenti la conica Γ hanno equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Intersechiamo con la retta p_1:

$$p_1\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ cz^2 + (d - 2a)z = 0. \end{cases}$$

p_1 è contenuta in questa quadrica se $c = 0$ e $d - 2a = 0$.

Facciamo l'intersezione con p_2:

$$p_2\colon \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + z(ax + by + cz + d) = 0 \\ x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ cz^2 + (d - 2b)z = 0. \end{cases}$$

p_2 è contenuta in questa quadrica se $c = 0$ e $d - 2b = 0$.

Imponendo il passaggio per A otteniamo $-a - b + c - d + 4 = 0$. Dunque, la quadrica è data da:

$$\begin{cases} c = 0 \\ d - 2a = 0 \\ d - 2b = 0 \\ -a - b + c - d + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 2. \end{cases}$$

Quindi, la quadrica cercata ha equazione:

$$x^2 - 2xy + y^2 + xz + yz + 2x + 2y + 2z = 0.$$

Le matrici associate sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $|B| = 4$ e $|A| = -1$, per cui la quadrica è un iperboloide iperbolico. Notiamo che non può essere un ellissoide immaginario, in quanto contiene punti reali.