CdL in Ingegneria Industriale (F-O)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 11 Luglio 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (0, -1, -1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 0, -1)$ e $v_3 = (1, 0, 1, 0)$ ed i sottospazi $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z - 2t = y - z - t = 0\}.$$

1. Determinare $V \cap W$ e $V + W$, specificando se la somma è diretta o meno.
2. Data l'applicazione lineare $f\colon V \to \mathbb{R}^4$ definita da:
$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, -4, -h, h^2 - h) \\ f(v_2) &= (h + 2, -1, 2, h^2) \\ f(v_3) &= (2, -1, h, -2), \end{aligned}$$
al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale f induce un endomorfismo $g\colon V \to V$.
3. Per tale valore di h studiare la semplicità di g, determinando, se possibile, una base di autovettori.
4. Determinare l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a V induce g e per il quale W è autospazio associato all'autovalore 2.

Soluzione

1. Dal momento che la matrice:
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
è ridotta di rango 3, deduciamo che $\dim V = 3$ e che $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di V. Calcoliamo la sua equazione cartesiana:
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - z + t = 0,$$
cioè $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + t = 0\}$. Dunque:
$$\begin{aligned} V \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z - 2t = 0,\ y - z - t = 0,\ x - z + t = 0\} = \\ = \{(-4t, -2t, -3t, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((-4, -2, -3, 1)). \end{aligned}$$
Dunque, $\dim(V \cap W) = 1$ e questo ci dice che la somma non è diretta. Inoltre, essendo chiaramente $\dim W = 2$, si ha:
$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4,$$
per cui $V + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4. Questo ci dice che $V + W = \mathbb{R}^4$.

2. Perché f induca un endomorfismo g di V deve accadere che $f(v_1), f(v_2), f(v_3) \in V$, cioè che soddisfino la sua equazione cartesiana $x - z + t = 0$:

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= (h, -4, -h, h^2 - h) \in V \Leftrightarrow h + h^2 = 0 \\
f(v_2) &= (h + 2, -1, 2, h^2) \Leftrightarrow h + h^2 = 0 \\
f(v_3) &= (2, -1, h, -2) \Leftrightarrow -h = 0.
\end{aligned}$$

Dunque, per $h = 0$ f induce un endomorfismo g di V tale che:

$$\begin{aligned}
g(v_1) &= f(v_1) = (0, -4, 0, 0) \\
g(v_1) &= f(v_2) = (2, -1, 2, 0) \\
g(v_1) &= f(v_3) = (2, -1, 0, -2),
\end{aligned}$$

3. Per studiare la semplicità di g occorre scrivere la matrice $M^{\mathscr{A}}(g)$, essendo $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$. Si vede che:

$$\begin{aligned}
[g(v_1)]_{\mathscr{A}} &= [(0, -4, 0, 0)]_{\mathscr{A}} = (4, -4, 4) \\
[g(v_2)]_{\mathscr{A}} &= [(2, -1, 2, 0)]_{\mathscr{A}} = (1, -1, 3) \\
[g(v_3)]_{\mathscr{A}} &= [(2, -1, 0, -2)]_{\mathscr{A}} = (1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Quindi:

$$M^{\mathscr{A}}(g) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P(T) = \begin{vmatrix} 4 - T & 1 & 1 \\ -4 & -1 - T & 1 \\ 4 & 3 & 1 - T \end{vmatrix} = (2 - T)(-2 - T)(4 - T),$$

per cui gli autovalori sono 2, -2 e 4, tutti di molteplicità algebrica 1 e g è certamente semplice. È possibile, perciò, determinare una base di autovettori.

Sappiamo che $V_2 = \operatorname{Ker} g_2$, dove $g_2 = g - 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_2) = M^{\mathscr{A}}(g) - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
V_2 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} &= (a, b, c),\ 2a + b + c = 0,\ -6a - 4b = 0\} = \\
&= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a, -\tfrac{3}{2}a, -\tfrac{1}{2}a)\} = \mathscr{L}(2v_1 - 3v_2 - v_3) = \mathscr{L}((-4, -2, -3, 1)).
\end{aligned}$$

$V_{-2} = \operatorname{Ker} g_{-2}$, dove $g_{-2} = g + 2i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_{-2}) = M^{\mathscr{A}}(g) + 2I = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
V_{-2} = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} &= (a, b, c),\ 6a + b + c = 0,\ -10a = 0\} = \\
&= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (0, b, -b)\} = \mathscr{L}(v_2 - v_3) = \mathscr{L}((0, 0, -1, -1)).
\end{aligned}$$

Infine, $V_4 = \operatorname{Ker} g_4$, dove $g_4 = g - 4i$ e:

$$M^{\mathscr{A}}(g_4) = M^{\mathscr{A}}(g) - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riducendo}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$V_4 = \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (a,b,c),\ b+c=0,\ -4a-6b=0\} =$$
$$= \{v \in V \mid [v]_{\mathscr{A}} = (-\tfrac{3}{2}b, b, -b)\} = \mathscr{L}(-3v_1 + 2v_2 - 2v_3) = \mathscr{L}((0,3,1,1)).$$

Dunque, una base di autovettori per g è $[(-4,-2,-3,1),(0,0,-1,-1),(0,3,1,1)]$.

4. Dal punto precedente notiamo che $V_2 = \mathscr{L}((-4,-2,-3,1))) = V \cap W$, per cui $(-4,-2,-3,1)$ è autovettore associato all'autovalore 2 anche per φ. Prendiamo un qualsiasi vettore di W non appartenente a V. Per esempio, vediamo che:

$$W = \{(2z+2t, z+t, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathscr{L}((2,1,1,0),(2,1,0,1))$$

e possiamo scegliere $(2,1,1,0)$. A questo punto, osserviamo che necessariamente i vettori v_1, v_2, v_3 e $(2,1,1,0)$ individuano una base di $\mathbb{R}^4$. Dalle condizioni assegnate, $(2,1,1,0)$ deve essere autovettore associato all'autovalore 2, per cui φ è determinato da:

$$\begin{aligned}
\varphi(2,1,1,0) &= 2 \cdot (2,1,1,0) = (4,2,2,0)\\
\varphi(0,-1,-1,-1) &= g(0,-1,-1,-1) = (0,-4,0,0)\\
\varphi(1,0,0,-1) &= g(1,0,0,-1) = (2,-1,2,0)\\
\varphi(1,0,1,0) &= g(1,0,1,0) = (2,-1,0,-2).
\end{aligned}$$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare le equazioni dei piani α e β paralleli alla retta $r\colon x-z-1 = y-z-3 = 0$, perpendicolari al piano $\pi\colon x-2y+z-6=0$ ed aventi distanza $\sqrt{2}$ dal punto $P=(0,1,-4)$.

2. Nel piano $z=0$ sono assegnati la retta $s\colon x-y=0$ e il punto $A=(2,0)$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per l'origine e per A e aventi la retta s come asse di simmetria. Determinare il fuoco e la direttrice dell'unica parabola del fascio.

3. Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le quadriche del fascio Φ di equazione:

$$x^2 + ky^2 - z^2 - x + y = 0$$

e determinare il vertice del cono di Φ.

Soluzione

1. Siano (a,b,c) componenti di un vettore perpendicolare ai piani α e β. Essendo $(1,1,1)$ parametri direttori di r e $(1,-2,1)$ componenti di un vettore perpendicolare a π, deve essere:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a. \end{cases}$$

Dunque, componenti di un vettore perpendicolare ad α e β sono $(1,0,-1)$. Dunque, questi piani hanno equazione del tipo $x-z+d=0$. Imponiamo che la distanza di P da questi piani sia $\sqrt{2}$:

$$\frac{|4+d|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow d=-2 \quad \text{e} \quad d=-6.$$

Dunque, i due piani cercati hanno equazioni $x-z-2=0$ e $x-z-6=0$.

2. Dal momento che $O \in s$, deduciamo che O è un vertice per queste coniche e che la retta t ortogonale a s e passante per O è tangente alle coniche in O. È semplice vedere che $t\colon x+y=0$. Inoltre, dato che s è asse di simmetria, vediamo che le coniche passano per il punto A' simmetrico di A rispetto a s. La retta p passante per A e ortogonale a s ha equazione $x+y-2=0$. Si vede che:

$$H = p \cap s\colon \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1, \end{cases}$$

per cui $H=(1,1)$. A questo punto, il punto $A'=(x,y)$ è tale che H è il punto medio di A e A':

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}=1 \\ \dfrac{y}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2. \end{cases}$$

Quindi, $A'=(0,2)$ e possiamo concludere che le coniche del fascio sono tangenti alla retta $t\colon x+y=0$ nell'origine e passano per $A=(2,0)$ e $A'=(0,2)$. Quindi, le coniche spezzate del fascio sono $(x+y)(x+y-2)=0$ e $xy=0$. Possiamo, ora, scrivere l'equazione del fascio di coniche:

$$(x+y)(x+y-2)+hxy=0 \Rightarrow x^2+(h+2)xy+y^2-2x-2y=0.$$

Le uniche coniche spezzate del fascio sono le due utilizzate per scriverne l'equazione. Questo significa che $|B|=0$ solo per $h=0$ e che per $h \neq 0$ abbiamo coniche irriducibili. Inoltre, da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{h+2}{2} \\ \dfrac{h+2}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-h^2-4h}{4}$$

vediamo che per $-4<h<0$ abbiamo delle ellissi, tutte reali, tra le quali abbiamo una circonferenza per $h=-2$; per $h=-4$ abbiamo l'unica parabola del fascio; per $h<-4$ e per $h>0$ abbiamo delle iperboli, nessuna delle quali è equilatera.

La parabola del fascio ha equazione $x^2-2xy+y^2-2x-2y=0$ e, per costruzione, sappiamo che l'asse di simmetria è la retta $s\colon x-y=0$ e che il vertice è l'origine. Per trovare fuoco e direttrice ci serve una sua forma canonica. Sappiamo che:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B|=-4.$$

L'equazione in forma ridotta è del tipo $\beta Y^2 = 2\gamma X$, dove $\beta = \mathrm{Tr}(A)=2$, e $-\beta\gamma^2=|B|$, per cui $\beta=2$ e $\gamma^2=2$. Prendendo $\beta=2$ e $\gamma=\sqrt{2}$, vediamo che la forma ridotta è $2Y^2=2\sqrt{X}$, per cui abbiamo $Y^2=\sqrt{2}X$. Dunque, questa è la sua forma canonica del tipo $Y^2=2pX$, dove $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi, si ha che $\frac{p}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ e per trovare fuoco e direttrice occorre trovare i punti dell'asse di simmetria che distano $\frac{p}{2}$ dal vertice:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{1}{16} \\ y=x. \end{cases}$$

Quindi, i due punti sono $B=(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ e $C=(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$. Uno dei due punti è il fuoco e l'altro appartiene alla direttrice. Siano s_1 e s_2 le rette passanti, rispettivamente, per B e per C e perpendicolari all'asse di simmetria. La direttrice è quella tra le due rette che non ha punti reali in comune con la parabola. Si vede che $s_1\colon x+y+\frac{1}{2}=0$. Andiamo a fare l'intersezione con la parabola:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{2}=0 \\ x^2-2xy+y^2-2x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-\dfrac{1}{2} \\ 4x^2+2x+\dfrac{5}{4}=0. \end{cases}$$

Dal momento che l'equazione $4x^2 + 2x + \frac{5}{4} = 0$ ha $\Delta < 0$, essa ha soluzioni immaginarie ed immaginari sono i punti che la retta $s_1\colon x + y + \frac{1}{2} = 0$ ha in comune con la parabola. Questo significa che s_1 è la direttrice e che il punto $C = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ è il fuoco.

3. Le matrici associate alle quadriche sono:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & k & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui $|B| = \dfrac{k+1}{4}$ e $|A| = -k$. Quindi, per $k = -1$ abbiamo $|B| = 0$ e $|A| \neq 0$, per cui la quadrica è un cono. Cerchiamo il suo vertice risolvendo il sistema associato alla matrice B:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ -y + \frac{1}{2} = 0 \\ -z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

e il vertice è il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Poi, per $k = 0$ abbiamo $|B| = \frac{1}{4}$ e $|A| = 0$, per cui abbiamo un paraboloide iperbolico. Per $k \neq 0, -1$, osserviamo che gli autovalori di A sono 1, -1 e k, che sono sempre discordi per ogni valore di k. Quindi, non abbiamo mai ellissoidi, ma solo iperboloidi. In particolare, per $k > -1$, $k \neq 0$, abbiamo iperboloidi iperbolici e per $k < -1$ abbiamo iperboloidi ellittici.